

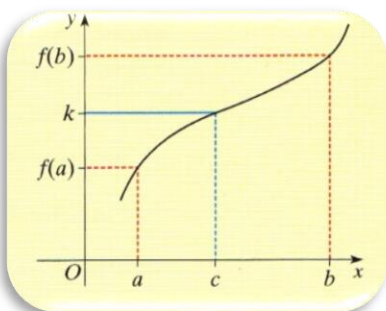
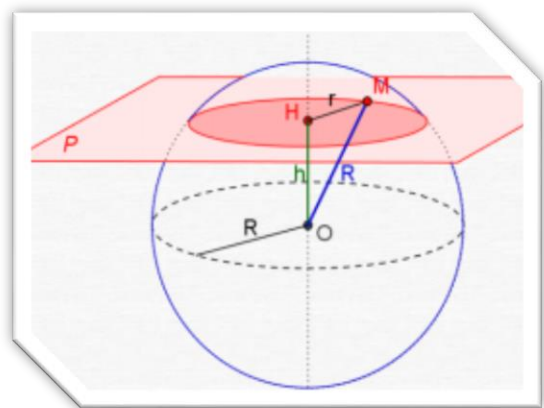
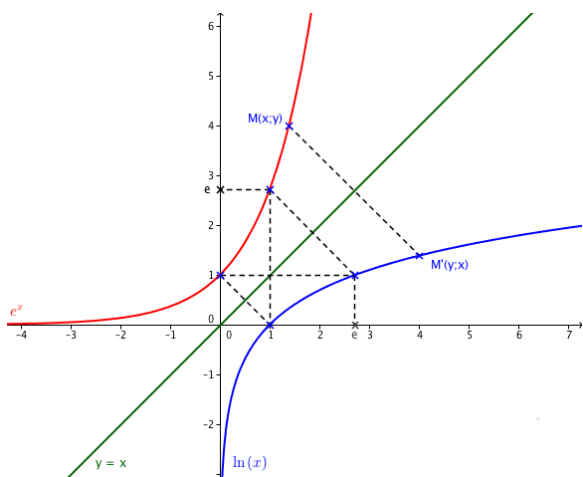
ثانوية عمر الخيام التأهيلية - برشيد

BAC 2023
Yes we can

MATHEMATIQUES

Deuxième bac sciences expérimentales

Essentiel du cours+ Exercices



Année scolaire : 2022/2023

Pr : BELKHYR

Si vous voulez devenir physicien, il faut faire trois choses :
Premièrement, étudier les **mathématiques**,
Deuxièmement, étudier les **mathématiques**,
Et troisièmement, continuer à faire la même chose.

Herrn Sommerfeld

العطل المدرسية 2023/2022

اليومية المدرسية

2023 / 2022

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والعالمية الأولى والرياضة



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والعالمية الأولى والرياضة

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
4	3	2	1						
11	10	9	8	7	6	5			
18	17	16	15	14	13	12			
25	24	23	22	21	20	19			
31	30	29	28	27	26				

♦ 11-04 / العطلة البيئية الثانية:
♦ 24-23 / امتحان الكفاءة المهنية:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
6	5	4	3	2	1				
13	12	11	10	9	8	7			
20	19	18	17	16	15	14			
27	26	25	24	23	22	21			
			30	29	28				

♦ 6 / ذكرى المسيرة الخضراء:
♦ 18 / عيد الاستقلال:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
2	1								
9	8	7	6	5	4	3			
16	15	14	13	12	11	10			
23	22	21	20	19	18	17			
30	29	28	27	26	25	24			
						31			

♦ 13-12 / ربيع الأول ذكرى المولد النبوي الشريف
♦ 23-30 / العطلة البيئية الأولى:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
4	3	2	1						
11	10	9	8	7	6	5			
18	17	16	15	14	13	12			
25	24	23	22	21	20	19			
			30	29	28	27	26		

♦ 1 / التحاق الأطر الإدارية والتربوية:
♦ 2 / التحاق أطر هيئة التدريس:
♦ 5 / التحاق التلاميذ وانطلاق الدراسة:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
5	4	3	2	1					
12	11	10	9	8	7	6			
19	18	17	16	15	14	13			
26	25	24	23	22	21	20			
			31	30	29	28	27		

♦ 19-12 / العطلة البيئية الثالثة:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
5	4	3	2	1					
12	11	10	9	8	7	6			
19	18	17	16	15	14	13			
26	25	24	23	22	21	20			
						28	27		

♦ 31 ماي - 3 يونيو / الامتحانات الجهوية للبيكالوريا:
♦ 6-10 / الامتحانات الوطنية للبيكالوريا:
♦ 8-15 / آخر فروض الأسس الثاني: إعدادي/ابتدائي:
♦ 10-17 / مسك نقط الأسس الثاني: إعدادي/ابتدائي:
♦ 15-16 / الموحد الجهوي للسلك الإعدادي:
♦ 19 / إعلان نتائج الدورة العادية للبيكالوريا:
♦ 20 / الموحد الإقليمي للسلك الابتدائي:

♦ 1 / رأس السنة الميلادية:
♦ 9-14 / آخر فروض الأسس الأول: ابتدائي/إعدادي:
♦ 12-17 / آخر فروض الأسس الأول: تأهيلي:
♦ 11-16 / مسك نقط الأسس الأول: ابتدائي/إعدادي:
♦ 13-18 / مسك نقط الأسس الأول: تأهيلي:
♦ 11 / ذكرى تقديم وثيقة المطالبة بالاستقلال:
♦ 16 / الموحد المحلي للسلك الابتدائي:
♦ 16-17 / الموحد المحلي للسلك الإعدادي:
♦ 22-29 / عطلة منتصف السنة الدراسية:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
1									
8	7	6	5	4	3	2			
15	14	13	12	11	10	9			
22	21	20	19	18	17	16			
29	28	27	26	25	24	23			
						31	30		

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
2	1								
9	8	7	6	5	4	3			
			13	12	11	10			

♦ 08-11 / عيد الحجة/ عيد الأضحي المبارك:
♦ 3-4 / الاستدراكية: الامتحانات الجهوية باك أحرار:
♦ 5-8 / الاستدراكية: الامتحانات الوطنية للبيكالوريا:
♦ 13 / إعلان نتائج الدورة الاستدراكية للبيكالوريا:
♦ 10 / توقيع محاضر الخروج بمختلف الأسلاك:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
4	3	2	1						
11	10	9	8	7	6	5			
18	17	16	15	14	13	12			
25	24	23	22	21	20	19			
			30	29	28	27	26		

♦ 31 ماي - 3 يونيو / الامتحانات الجهوية للبيكالوريا:
♦ 6-10 / الامتحانات الوطنية للبيكالوريا:
♦ 8-15 / آخر فروض الأسس الثاني: إعدادي/ابتدائي:
♦ 10-17 / مسك نقط الأسس الثاني: إعدادي/ابتدائي:
♦ 15-16 / الموحد الجهوي للسلك الإعدادي:
♦ 19 / إعلان نتائج الدورة العادية للبيكالوريا:
♦ 20 / الموحد الإقليمي للسلك الابتدائي:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
7	6	5	4	3	2	1			
14	13	12	11	10	9	8			
21	20	19	18	17	16	15			
28	27	26	25	24	23	22			
			31	30	29				

♦ 30 أبريل - 07 ماي / العطلة البيئية الرابعة:
♦ 1 / عيد الشغل:
♦ 15-20 / آخر فروض الأسس الثاني: الأول والثانية باك:
♦ 22-27 / آخر فروض الأسس الثاني: الجذع المشترك:
♦ 25-01 يونيو / مسك نقط الأسس الثاني: تأهيلي:
♦ 29-30 / الامتحان الوطني للبيكالوريا: الأحرار:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
2	1								
9	8	7	6	5	4	3			
16	15	14	13	12	11	10			
23	22	21	20	19	18	17			
30	29	28	27	26	25	24			

♦ 29 رمضان - 02 شوال / عيد الفطر المبارك:

Tarbiya.info

1) Etude de fonctions (limites, continuité, dérivation, branches infinies)	Page 1
2) Suites numériques	Page 13
3) Primitives d'une fonction	Page 17
4) Fonctions logarithmes	Page 18
5) Fonctions exponentielles	Page 23
6) Calcul intégral	Page 28
7) Equations différentielles	Page 31
8) Nombres complexes	Page 32
9) Géométrie dans l'espace (étude analytique)	Page 38
10) Dénombrement	Page 43
11) Probabilités	Page 45

Etude de fonctions

I) Limite d'une fonction (Rappel)

Limite d'une fonction polynôme

- Si f est une fonction **polynôme** alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Limite d'une fonction rationnelle

- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.

- Soit f une fonction rationnelle tel que : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ forme indéterminée. C'est à dire a est une racine de $p(x)$ et $q(x)$

donc
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)p_1(x)}{(x-a)q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Limite d'une fonction irrationnelle

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, avec $(a \geq 0)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Limites usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Limites trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Formes indéterminées

$$+\infty + (-\infty) \quad \text{et} \quad 0 \times \infty$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Operations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I

Limite du produit de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L \neq 0$	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$L \times M$	∞	∞	F. I

Le signe se détermine en respectant la règle des signes

Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L \neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$M \neq 0$	0	M	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{L}{M}$	∞	∞	F. I	F. I

Limites et ordre.

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème: Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES : Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et k un réel.

Si $(\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = k$ Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

Lemme :

Si $(\forall x \in I); |f(x) - k| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1: Calculer les limites

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3x^2 - x^3$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x + 5$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x + 1)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{x - x^2 + 9}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5}{x^2 - 6x + 9}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2 + 1}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x - 1}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - 2x$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + 2x$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - x$
- 16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + x$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - \sqrt{x + 1} - 1}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - 3x$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} + x - 5}{x - 2}$
- 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^2 x}{x^2 + 2}$

Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur $I =]0 ; 3[$ par: $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$

- 1) Etudier le signe de f sur l'intervalle I .
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de I .

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9}$

- 1) Etudier le signe de $x^2 - 6x + 9$.
- 2) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
- 3) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

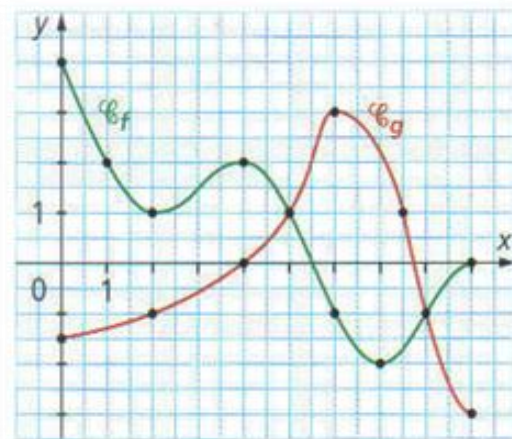
Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

- 1) Montrer que, $(\forall x > 0); \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$.
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 5 :

Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g .



- 1) Conjecturez
 - a) D_f et D_g
 - b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
 - c) $f([0; 2])$ et $g([0; 9])$
 - d) Le signe de $f(x)$.
 - e) Le signe de $g'(x)$.
 - f) Le tableau de variation de f .
- 2) Quelles sont les solutions des équations:

$$f(x) = g(x) ; f(x) = 0 ; f(x) = -1 \text{ et } g(x) = 1$$
- 3) Soit m un réel donné, discuter selon les valeurs de m le nombre de solutions de $f(x) = m$.
- 4) Résoudre graphiquement les inéquations :

$$f(x) \leq g(x) ; f(x) \geq 0 ; f(x) < -1 \text{ et } g(x) \geq 1.$$
- 5) Supposons que $D_f = [-9; 9]$ et f est une fonction paire .
 - a) Donnez la valeur de : $f(-4)$ et $f(-7)$
 - b) Complétez la construction de la courbes (C_f) .
- 6) Construire la courbe de la fonction $|f|$ sur l'intervalle $[0; 9]$.

Le succès est la somme de petits efforts, répétés jour après jour.

Leo Robert Collier

II) Continuité d'une fonction.

1) Continuité en un point- continuité à droite - continuité à gauche

Définition1: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Attention : Une fonction ne peut pas être continue en un point qui n'appartient pas au domaine de définition, cela n'a aucun sens.

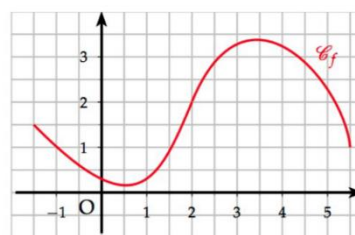
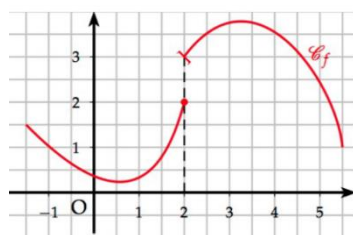
Définition2: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.

On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Propriété: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

La fonction f est
discontinue en 2 car
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



La fonction f est
continue en 2 car
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$

Théorème: Si f est dérivable en un point a , alors f est continue en a .

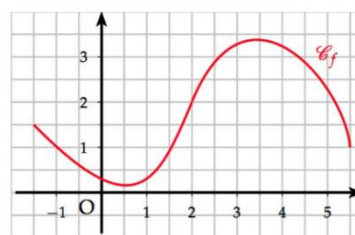
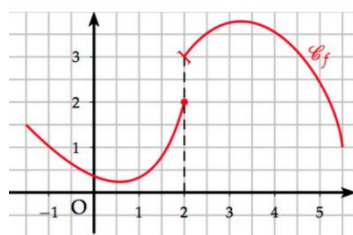
Attention : La réciproque est fausse.

2) Continuité sur un intervalle

Définition : On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de l'intervalle.

Remarque : Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

La fonction f n'est
pas continue
(discontinue) sur
 $[0;3]$



La fonction f est
continue sur $[0;3]$

Propriétés : - Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est continue sur les intervalles où elle est définie.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$.

- La fonction **tangente** est continue sur ses intervalles de définition.

- Toutes les fonctions construites par **somme**, **produit**, **quotient** ou par **composition** des fonctions précédentes sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème: Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Attention : La réciproque est fausse.

Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, mais n'est pas dérivable en zéro.

3) Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.

Propriétés : L'image d'un intervalle par une fonction continue non constante est un intervalle.
 ▪ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarques : $f([a;b]) = [m; M]$ tels que m est le minima et M est le maxima de f sur le segment $[a;b]$.

- Si l'intervalle I n'est pas fermé, alors son image est un intervalle qui peut être fermé, ouvert ou semi-ouvert.

Cas particulier :

L'image d'un intervalle I par une fonction f continue et strictement monotone est un intervalle $J = f(I)$.

Si $I = \dots$	$f(I)$ est l'intervalle:	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a;b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$]-\infty;b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b) [$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$]a;+\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$

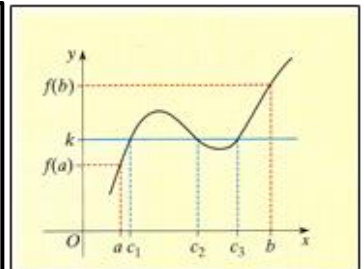
4) Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation:

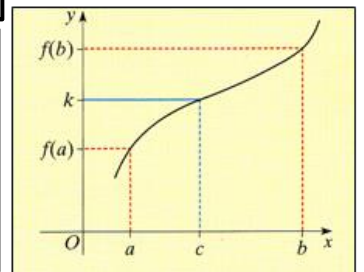
La droite $(D): y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Corollaire1 : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a;b]$.

Interprétation :

La droite $(D): y=k$ coupe la courbe de f en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Corollaire2 : Si f est une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]a;b[$.

Interprétation : la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b .

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

5) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

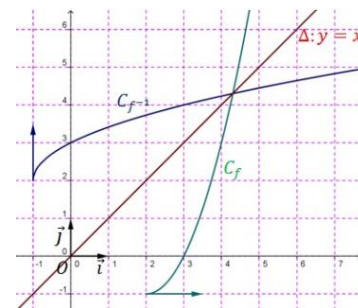
Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.

La fonction **réciproque** de la fonction f est la fonction notée f^{-1} définie sur J à valeurs dans I , telle que : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ avec $x \in J$ et $y \in I$

Corollaires : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :

- 1) f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J = f(I)$ à valeurs dans I
- 2) $(\forall x \in I); f^{-1}(f(x)) = x$ et $(\forall y \in J); f(f^{-1}(y)) = y$
- 3) La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur $J = f(I)$. (de même sens de monotonie que f)

Dans un repère orthonormé, $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice. (la droite d'équation $y = x$).



Théorème(important): Si f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I et $k \in f(I)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans I .

III) Dérivabilité d'une fonction.

1) Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . et a un élément de I .

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un

nombre réel ℓ tel que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; b[$ avec $b > a$.

On dit que f est dérivable à droite en a , s'il existe un nombre réel ℓ tel que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé à droite en a , et on le note $f'_d(a)$.

Propriété : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a , f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

- 1) Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente en $A(a; f(a))$ d'équation: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- 2) Si f est dérivable en a alors $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est la fonction affine tangente à f au point a .
- 3) Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors (C_f) admet une tangente horizontale en $A(a; f(a))$.
- 4) Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.
- 5) Si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.
- 6) Si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors $A(a; f(a))$ est **un point anguleux**
(Il existe une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche, de pentes différentes)
- 7) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en a , et si f est continue à droite en a ,
Cependant, la courbe admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.

2) Dérivabilité sur un intervalle - Fonction dérivée d'une fonction.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I . Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .
- On dit que f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Remarque : En physique on utilise la notation différentielle : $f'(x) = \frac{df}{dx}$ et $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Propriétés : Toute fonction **polynôme** est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les deux fonctions **sin** et **cos** sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Propriétés : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel alors :

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et on a : $(u+v)' = u' + v'$
- La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et on a : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- La fonction ku est dérivable sur I et on a : $(ku)' = ku'$
- La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I si $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$ et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- La fonction $\frac{k}{v}$ est dérivable sur I si $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$ et on a : $\left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-kv'}{v^2}$

Théorème (Dérivation d'une fonction composée) :

Si v une fonction dérivable sur I et u est dérivable sur $J = f(I)$,

Alors $u \circ v$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I); (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

Théorème (Dérivation d'une fonction réciproque) :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$
- Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et on a :
 $(\forall x \in J); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel alors :

Opérations sur les fonctions dérivées	
$f(x)$	$f'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot u'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$u \circ v(x)$	$u'(v(x)) \times v'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$(u(x))^n$	$n \cdot (u(x))^{n-1} \times u'(x)$

Dérivées des fonctions usuelles	
$f(x)$	$f'(x)$
k	0
ax	a
ax^n	$n \cdot ax^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) Applications de la fonction dérivée.

■ Dérivée et variations.

Théorèmes admis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) > 0$, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) = 0$, alors la fonction f est **constante** sur I .

Remarque :

Si $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$ et f' s'annule en des points isolés alors la fonction f est **strictement croissante** sur I .

■ Extremums d'une fonction.

Propriété :

f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un **extremum local** de la fonction f sur I .

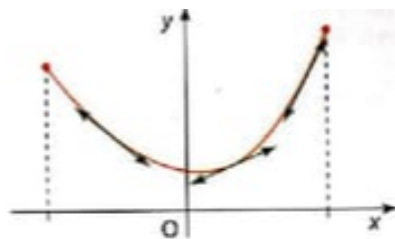
Remarque : Si $f'(a) = 0$ et f' ne change pas de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

■ Concavité et dérivée seconde

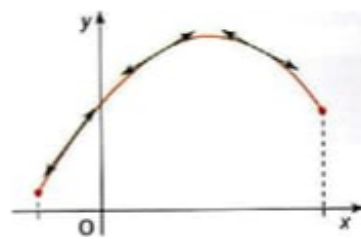
Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives (**convexe**), s'elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives (**concave**), s'elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

(C_f) est
convexe



(C_f) est
concave



Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f''(x) \geq 0$, alors la courbe de f admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
- Si $(\forall x \in I); f''(x) \leq 0$, alors la courbe de f admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

IV) Position relative d'une courbe et d'une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe (C_f) et d'une droite $(\Delta): y = ax + b$ sur un intervalle I , on doit étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur I .

- si $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) \geq 0$, alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur I .
- si $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) \leq 0$, alors (C_f) est au-dessous de (Δ) sur I .
- Les solutions de l'équation $f(x) - (ax + b) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ) .

V) Les branches infinies

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

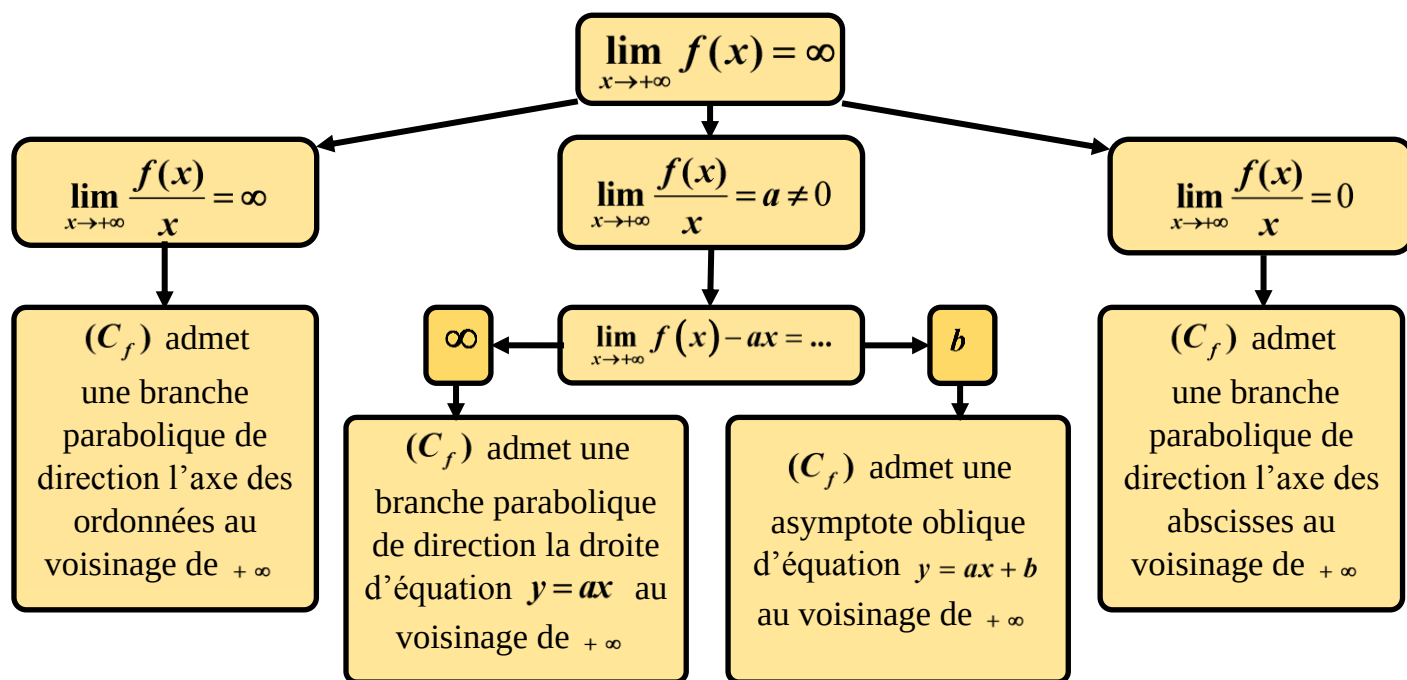
La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (C_f) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$



VI) Axe de symétrie - Centre de symétrie

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que la droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si pour tout x de D on a :
 $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$

On dit que le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si pour tout x de D on a :
 $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

VII) Fonction paire - Fonction impaire - Fonction périodique

On dit que f est une fonction **paire** : Si pour tout x de D_f on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
Remarque : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que f est une fonction **impaire** : Si pour tout x de D_f on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
Remarque : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

On dit que f est une fonction **périodique** s'il existe un réel positif T tel que : pour tout x de D_f on a : $(x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$ (T est appelé une période de la fonction f)

VIII) Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition : a désignant un réel positif et n un entier naturel non nul.

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de a le réel positif noté $\sqrt[n]{a}$ tel que $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Propriétés : Pour tous réels x et y positifs et pour tous entiers naturels non nuls m et n on a :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction **réciroque** de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} / y \neq 0$

Remarque. Les règles de calculs sur les **racines $n^{\text{ième}}$** sont les mêmes que celles sur les racines carrées.

Activité :

1) Montrer que : $(\forall x > 0) : (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

2) Montrer que si u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors on a :

$$(\forall x \in I) : (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$$

IX) Puissance d'exposant rationnel d'un réel strictement positif.

Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel tel qu: $r = \frac{p}{q}$ avec $(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On remarque que : $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p}{q} \times q} = x^p$ et $\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q = x^p$ donc $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tous nombres rationnels m et n on a :

- $x^n \times y^n = (xy)^n$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Remarque. Les règles de calculs sur les exposants rationnels sont les mêmes que celles sur les exposants entiers.

Exercice d'application

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f) .
- 2) Déterminer l'intersection de (C_f) et les axes du repère
- 3) Montrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .
- 4) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau des variations.
- 5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
- 6) Etudier la concavité de (C_f) .
- 7) Etudier la position relative de la droite $(\Delta): y = -2x + 2$ et (C_f) .
- 8) Tracer la courbe (C_f) .

**Every one thinks of changing
the world, but no one thinks
of changing himself**

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ f(x) = \sqrt{x+2} + 10 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

- 1) Calculer $f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- 2) Est-ce que la fonction f est continue en 2 ?
- 3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) Etudier la dérivabilité de f en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α sur $[0; +\infty[$ et que $\alpha \in]0; 1[$.
- 2) Donner un encadrement d'amplitude 0,125 de α
- 3) En déduire que :
($\forall x \in [0; \alpha]$); $f(x) \leq 0$ et ($\forall x \in [\alpha; +\infty[$); $f(x) \geq 0$
- 4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis calcule $f^{-1}(-2)$ et $(f^{-1})'(-2)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - 3x - x^3 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

- (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1) Etudier la continuité de f en 1.
 - 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Puis Interpréter graphiquement les résultats.
 - 3) calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 1[$.
 - 4) Montrer que le point $I(0; 3)$ est un point d'inflexion de (C_f).
 - 5) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
 - 6) Etudier les branches infinies de (C_f).
 - 7) Ecrire une équation de la tangente à (C_f) au point I
 - 8) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 1[$ et que $0 < \alpha < 1$.
 - 9) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 - 10) Soit g la restriction de f sur l'intervalle

$] -\infty, 1[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis tracer sa courbe dans le repère précédant.

Exercice 4 :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

- 1) Déterminer D_f , puis étudier les variations de f
- 2) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $] -\infty; -2[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Calculer $g^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$, puis déterminer $g^{-1}(x)$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

- 1) Déterminer D_f , calculer les limites de la fonction f aux bornes ouvertes de D_f .
- 2) a - Vérifier que ($\forall x \in [0; +\infty[$); $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$
b - En déduire que f est strictement croissante sur $I = [0; +\infty[$.
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle I .
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 6 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

- 1) Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Donner le tableau de variation de g .
c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$

par : $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser son domaine de définition J .

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{5 - x^3} + x$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - x}{x}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{4x^2 + x}}$$

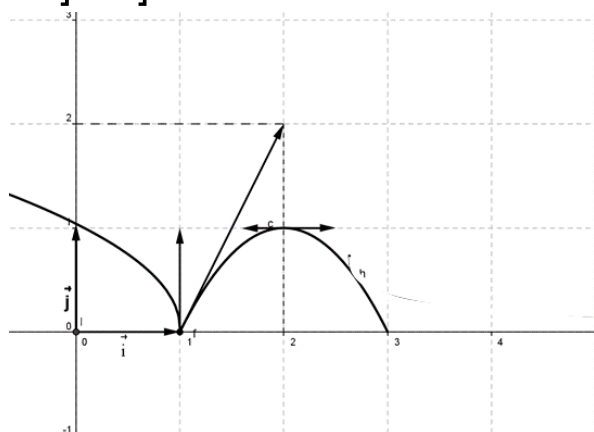
$$E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

Rappel : $a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ et $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

Exercice 9 :

La courbe ci dessous et celle d'une fonction f définie sur $] -\infty; 3]$.



1) Déterminer $f'(2)$, (justifier)

2) Donner $f_d'(1)$, justifier.

3) f est-elle dérivable à gauche en 1, justifier ?

4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$.

5) Dresser le tableau de variation de f sur $] -\infty; 3]$.

Exercice 10 :

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f , puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses !

2) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de (C_f) .

3) Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à (C_f) .

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5) Etudier la concavité de (C_f) et résumer cette étude dans un tableau.

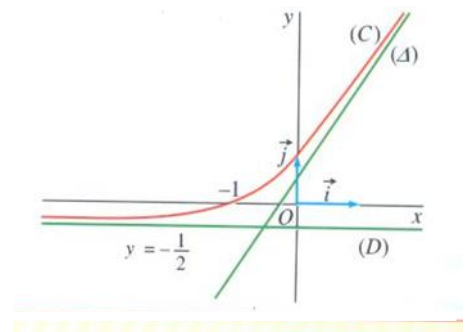
6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7) Etudier la position de (C_f) par rapport à (T)

8) Tracer (C_f) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 11 :

(C) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.



La droite $(D) : y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

La droite $(\Delta) : y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Par une lecture graphique.

1) Déterminer le signe de $f(x)$.

2) Déterminer le sens de variations de f .

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.

Exercice 12 :

Soit f une fonction tel

que : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$ Et (C_f) sa courbe

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, puis interpréter

géométriquement le résultat.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4) a)- Montrer que : $(\forall x \in D_f); f(x) = x + 1 - \frac{x+1}{x^2}$

b)- Montrer que la droite $(\Delta): y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

5) a)- Montrer que :

$$(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2 - x + 2)}{x^4}.$$

b)- Etudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le T.V.

6) Montrer que : $(\forall x \in D_f); f''(x) = \frac{-2(x+3)}{x^4}$

et étudier la concavité de (C_f) puis en déduire que (C_f) admet un point d'inflexion I .

7) Etudier la position relative de (C_f) et de (Δ) .

8) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

9) Tracer la courbe (C_f) et la droite (T) .

Exercice 13 :

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2) Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$.

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer, (C_f) et (D) dans un repère orthonormé

Exercice 14:

Partie1 : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$$

1) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{3 + x^2} - x$$

1) Etudier les branches infinies de (C_f) .

2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .

3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe de f en son point d'abscisse -1

4) Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 15:

Soit f une fonction définie par: $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{2(x - 1)}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a)- Déterminer D_f , le domaine de définition de f

b)- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique des résultats.

3) a)- Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x - 1}$$

b)- En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) de la courbe (C_f) .

c)- Etudier la position relative de la courbe (C_f) et l'asymptote (Δ) .

4) a)- Montrer que:

$$(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)^2}$$

b)- Dresser le tableau de variations de f .

c)- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

5) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Suites numériques

I) Définition, vocabulaires et notations.

Définition : Toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$, ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ est dite suite numérique. $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p \text{ avec } p \in \mathbb{N}\}$

Notation et vocabulaire.

- L'image de n par la suite u est notée u_n au lieu de $u(n)$.
- La suite est notée $(u_n)_{n \in I}$ (ou plus simplement (u_n) si $n \in \mathbb{N}$).
- u_n est un terme de la suite, et on l'appelle terme général de la suite.
- Si la suite commence par u_1 , alors u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme, ou terme de rang n .
- Si la suite commence par u_0 , u_n est le terme de rang $n+1$.
- On peut définir une suite par une **formule explicite**, c'est-à-dire par une relation du type:
 $u_n = f(n)$ (**Exemple :** $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 3n^2 - 5$)
- On peut définir une suite par **récurrence**, c'est-à-dire par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou par d'autres types. (**Exemple :** $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $u_0 = 1$)

Principe de récurrence : (Rappel)

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n , on procède en deux étapes, puis on conclut.

- **Première étape :** On vérifie que P_0 est vraie.
- **Deuxième étape :** On suppose que pour un entier naturel n quelconque, la propriété P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion :** lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n positif.

II) Monotonie d'une suite numérique

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ tel que : $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p \text{ avec } p \in \mathbb{N}\}$

Définitions : On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement décroissante, si $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement croissante, si $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \geq u_n$.

III) Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

Définitions :

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq p) : u_n \leq M$.
Le nombre M est alors appelé un **majorant** de la suite $(u_n)_{n \geq p}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que : $(\forall n \geq p) : u_n \geq m$.
Le nombre m est alors appelé un **minorant** de la suite $(u_n)_{n \geq p}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme u_0 .
- Si (u_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme u_0 .

IV) Suite arithmétique – Suite géométrique.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
$(u_n)_{n \geq p}$ est une	S'il existe un réel r tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} - u_n = r$ (r est appelé raison de la suite)	S'il existe un réel q tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} = q u_n$ (q est appelé raison de la suite)
u_n en fonction de n	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p + (n - p)r$	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des premiers termes d'une	$S = \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right) (n - p + 1)$	$S = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$ avec $q \neq 1$

Avec $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$

V) Limite d'une suite numérique.

1) Suites de référence – suite convergente.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers le réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$

Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

- Des suites **convergentes** vers 0 : $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$; $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où p est un entier naturel non nul.
- Des suites **divergentes** vers $+\infty$: $(n^p)_{n \geq 0}$; $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 0}$ où p est un entier naturel non nul.
- Limite d'une suite **géométrique** :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

2) Critères de convergence.

Théorèmes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors (u_n) est **convergente** et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - L| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors (u_n) est **convergente** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Théorème :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

3) Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n = f(v_n)$

Propriété : Soit (u_n) et (v_n) deux suites tels que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = f(v_n)$

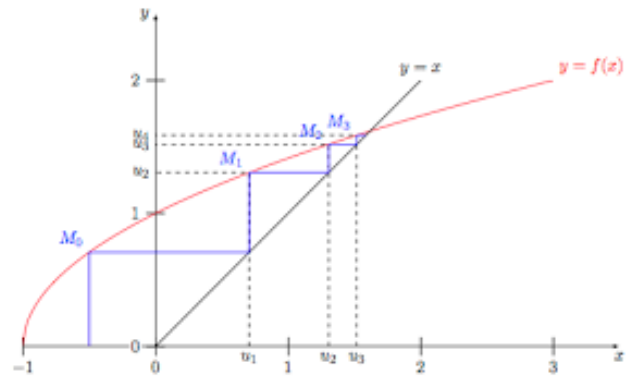
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ et f est **continue** en L alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(L)$

Propriété : Soit (u_n) une suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 \in I$$

- Si f est continue sur I ,
- $f(I) \subset I$
- (u_n) est convergente

alors la limite ℓ de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$



EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 2$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6$.
- 3) Etudier la monotonie de (u_n) .
- 4) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $v_n = u_n - 6$
 - a) Calculer v_0 et v_1 .
 - b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - c) Exprimer v_n en fonction de n .
 - d) En déduire u_n en fonction de n .
- 5) Exprimer S_n et w_n en fonction de n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$w_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- 6) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

Exercice2 :

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout

entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

pour tout entier naturel n ,

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de (u_n) .
- 2) a. Déterminer la monotonie de la suite (S_n) .
- b. Calculer S_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \quad / \quad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

- 1) Calculer u_1 et v_0 .

- 2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 5) Exprimer S_n en fonction de n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- 6) En déduire la valeur de S : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{99}$.
- 7) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice4

Soit (u_n) une suite définie par:

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$.
- b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) Soit (v_n) une suite tel que : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on précisera son premier terme et sa raison.
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de (u_n) .
- 3) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n < 1,001$

Exercice5

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$
- b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 3) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$.
- b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- c) calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$

c- Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

2) Soit (v_n) la suite réelle définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c- Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 7

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1) Montrer que $2 \leq u_n \leq \frac{7}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|u_n - 3|$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

3) Soit (v_n) la suite numérique telle que :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

4) On pose : $S_n = \frac{4}{u_0 + 1} + \frac{4}{u_1 + 1} + \dots + \frac{4}{u_n + 1}$

5) Montrer que $S_n = n + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 8

Partie I : On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

4) a) Montrer que $-1 < u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(3-u_n)}{6+u_n}$ pour

tout n de $\mathbb{N}$, puis en déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

5) Soit (v_n) une suite telle que :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ puis écrire v_n en fonction de n

b) Montrer que $u_n = \frac{3 - 3\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{5}{9}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$,

puis déterminer la limite de la suite (u_n)

6) a) Montrer que : $3 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(3 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_n \leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) Retrouver la limite de la suite (u_n) .

7) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > 2,99$

Partie II :

1) On considère la fonction f définie sur

$$[-2, +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{8x+3}{x+6}$$

a) Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $[-2, +\infty[$ puis déduire que f est croissante sur $[-2, +\infty[$

b) Étudier la continuité de f sur $[-2, +\infty[$

c) Déterminer $f([-1; 3])$

d) Montrer que $f(x) \geq x$, pour tout x de $[-1; 3]$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer que $-1 \leq u_n \leq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Primitives d'une fonction

1) Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle fonction **primitive**, ou primitive de f sur I , toute fonction F définie et **dérivable** sur I telle que : $(\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$

2) Propriétés.

Propriété1 : Toute fonction **continue** (dérivable) sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Propriété2 : Soit F une primitive de f sur un intervalle I .

- L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur I par :
 $x \mapsto F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
- En particulier, si $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive de f sur I telle que : $F(a) = b$.

Propriété3 : Soit F une primitive de f sur un intervalle I , alors G est une autre primitive de f sur l'intervalle I si et seulement si : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

3) Propriétés de calculs sur les primitives.

Primitives des fonctions usuelles	
$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur I . - U et V des primitives de u et v sur I	
$f(x)$	$F(x)$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x) + c$
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot U(x) + c$
$u' \times u$	$\frac{1}{2} u^2 + c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$	$n \cdot \sqrt[n]{u(x)} + c$
$u' \times u^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$

EXERCICES

Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

- 1) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 2) $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 3) $h : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 - 3)^3}$ sur $I = [4; +\infty[$.
- 4) $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 5) $f : x \mapsto \tan^2(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice2:

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$ définie sur $I = [3; +\infty[$.

1) Déterminer a, b et c de façon que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

2) Calculer les primitives de f sur $I = [3; +\infty[$.

3) En déduire la primitive F de f sachant que $F(3) = 1$.

I) Fonction logarithme népérien.

Activité :

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Définition: La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 (c'est-à-dire $\ln(1)=0$), est appelée la fonction logarithme népérien, cette fonction est notée **ln**.

2) En déduire que la fonction **ln** est continue et dérivable sur $I =]0; +\infty[$, et que **ln** est strictement croissante sur I .

3) Etudier le signe de la fonction **ln** sur $]0; +\infty[$.

4) Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

5) Montrer qu'il existe un, et un seul, nombre **e** de l'intervalle $]2,71; 2,72[$ tel que $\ln(e) = 1$.

6) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \ln(kx) - \ln(x)$ et $k > 0$.

a- Montrer que f' est nulle, puis en déduire la monotonie de f .

b- Donner $f(1)$, puis en déduire que $\ln(kx) = \ln(k) + \ln(x)$.

c- En déduire que pour tout couple $(a; b)$ de réels strictement positifs et pour tout relatif n on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a ; \quad \ln(a^n) = n \cdot \ln a \quad \text{et} \quad \ln(e^n) = n.$$

7) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

8) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et donner l'équation de la tangente de (C_m) au point

$$A(1; 0) \text{ puis en déduire } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

9) Considérons la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$.

a) Montrer que la fonction g est croissante sur $[1; +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est minorée par 2, et en déduire que

$$(\forall x \geq 1); 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

10) Etudier la concavité de **ln**, puis tracer (C_m) dans un repère orthonormé.

11) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Montrer que $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et que $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire : Si u est une fonction dérivable sur I telle que $u(x) \neq 0$ pour tout réel x de I , alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x \mapsto \ln|u(x)| + c$ où c est une constante réelle.

Conséquences

La fonction **ln** est définie, **continue** et **dérivable** sur $]0; +\infty[$, et pour tout réel strictement positif on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(a^n) = n \ln a \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$
- $\ln(e^n) = n \quad (n \in \mathbb{Z})$

Equations et inéquations

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$
- $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$
- $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*$

II) Logarithme de base a avec $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition :

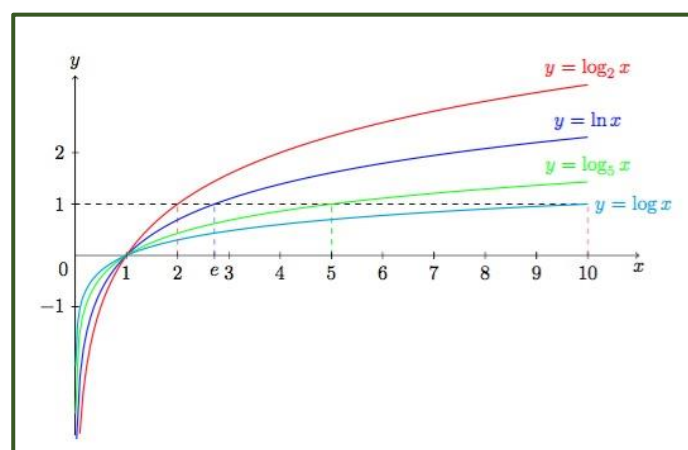
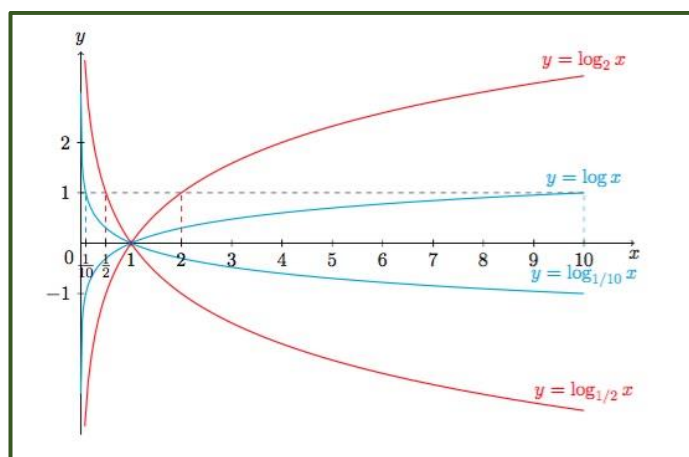
La fonction logarithme de base a , noté $\log_a$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, et $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ on a :

$\log_a(a) = 1$	$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a^x) = x$	$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$	$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x}$
$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$		$\log_a(x) \leq \log_a(y) \Leftrightarrow x \geq y$ si $a \in]0;1[$	$\log_a(x) \leq \log_a(y) \Leftrightarrow x \leq y$ si $a > 1$

Remarques : • $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$

- Si $a \in]0;1[$ la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
- Si $a \in]1;+\infty[$ la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- Formule de changement de base $\log_b(a) = \frac{\log_d(a)}{\log_d(b)}$



III) Logarithme décimal.

Définition :

La fonction logarithme décimal, noté $\log$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs on a :

$\log(10) = 1$	$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$	$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
$\log(1) = 0$	$\log(10^n) = n$	$\log(x^r) = r \cdot \log(x)$	$(\log)'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x}$
Formule de changement de base $\log_b(a) = \frac{\log(a)}{\log(b)}$			$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

« La folie, c'est se comporter de la même manière et s'attendre à un résultat différent »

Albert Einstein

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \ln(3 - \sqrt{3}) + \ln(3 + \sqrt{3})$$

$$B = \ln e^3 - \ln \frac{2}{e} + \ln 2$$

$$C = 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 9 - 2 \ln(2\sqrt{6})$$

Exercice 2:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$1) \ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$$

$$2) \ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln(x + 7)$$

$$3) 4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$$

Exercice 3:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$1) \ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$2) 4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 \leq 0$$

Exercice 4:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

$$1) f(x) = (\ln(x) - 2)\sqrt{4 - x}$$

$$2) f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

$$3) f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x} \quad 4) f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$$

Exercice 5:

Calculez les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 3)}{x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4x)}{x}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$F = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2) \ln x}{x^2 - 1}$$

$$G = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

Exercice 6:

Calculer $f'(x)$.

$$1) f(x) = x^2(2 \ln x - 1) \quad 2) f(x) = \ln \sqrt{1 + 4x + x^2}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1 + x} \quad 4) f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$$

Exercice 7:

La fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$f(x) = x\sqrt{\ln x}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $I = [1, +\infty[$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Déterminer l'intersection de $(\Delta): y = x$ et (C_f)

b) Tracer (C_f) et (Δ) .

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0, +\infty[$.

b) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a: $0 \leq u_n \leq e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Trouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 8:

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que $3,8 < \alpha < 4$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1, +\infty[$

4) Montrer que $(\forall x \in]-1, +\infty[): g(x) \leq 1$

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3) Montrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f

5) vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 9:

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

$$1) f(x) = \frac{3}{2x+1}; \quad I =]-0,5; +\infty[.$$

$$2) f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1}; \quad I = \mathbb{R}.$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x \ln x}; \quad I =]1; +\infty[$$

$$4) f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad I =]0; +\infty[$$

$$5) f(x) = \tan x; \quad I =]0; \frac{\pi}{2}[$$

Exercice 10:**Partie A:** Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$

par : $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$

1) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.**Partie B:** Soit f une fonction définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}, \text{ et } (C_f)$$

désigne la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement3) Montrer que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f .4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.5) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x + \ln x$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$. Et vérifier que $e^{-\alpha} = \alpha$.b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **Exercice 11:****Partie A:** g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$$

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ **Partie B:** f est la fonction définie sur $\mathbb{R} = [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter

géométriquement le résultat trouvé.

3) a) Vérifier que:

$$(\forall x > 0); f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. et interpréter le résultat trouvé géométriquement.4) a) Démontrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.b) En déduire les variations de f .5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.**Exercice 12:****Partie A:** Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x - 2)\ln x$$

a) Montrer que : $(\forall x > 0); g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ b) Etudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.**Partie B:** Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2 \text{ et } (C_f) \text{ désigne}$$

la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter

géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.3) a) Vérifier que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f .b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.En déduire le signe de $h(x)$.c- Montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1) \cdot h(x)$ et en déduire la position de (C_f) par rapport à (T) .5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Problème

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		$g(1)$	

- 1) Calculer $g(1)$.
- 2) En déduire à partir du tableau le signe de la fonction g

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x} \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

- 1) a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln x = 0$.
- b) Montrer que f est continue à droite en 0
- 2) a) Vérifier que $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.
- b) Vérifier que $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$
- d) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[1, +\infty[$
- 3) a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat
- b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(1)$
- c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$

4) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) a) Vérifier que $H : x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ sur $]0, +\infty[$

b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

6) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}

c) Calculer $f(e)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $e - \sqrt{e}$

d) Calculer $(f^{-1})'(e - \sqrt{e})$

Partie III : Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) Montrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Déduire la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = f^{-1}(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

De la même façon que personne n'est capable d'expliquer pourquoi les étoiles sont belles, c'est difficile d'exprimer la beauté des mathématiques
Yoko Ogawa

Fonction exponentielle

I) Fonction exponentielle népérienne.

Activité :

1) Montrer que la fonction **ln** admet une fonction réciproque définie sur **IR**.

Définition : La fonction réciproque de la fonction **ln** est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle népérienne** ou **naturelle** et se note **exp** . donc $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$

2) Calculer **exp(0)** et **exp(1)** .

$$e \approx 2,7182818284 59045235$$

3) déduire que la fonction **exp** est continue , dérivable et strictement croissante sur **IR**.

4) Etudier le signe de la fonction **exp** sur **IR**.

5) En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels on a :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) ; \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b} \text{ et } \exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$$

6) Tracer la courbe de la fonction **exp** dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x}$.

8) Déterminer $\exp'(x)$ et $(\exp(u(x)))'$ tel que **u** une fonction dérivable .

9) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\exp})$ au point $B(0;1)$.

10) Montrer que $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \exp(r) = e^r$.

Conséquences

La fonction **exp** est définie, continue et dérivable sur **IR**, et pour tout réel on a :

$$\exp(x) = e^x \text{ et } (e^x)' = e^x$$

• Le nombre **e** est un nombre irrationnel.

• Si **u** est dérivable sur **I**, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur **I** et on a : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels **a** et **b** , on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- $e^{\ln b} = b$ avec $b > 0$

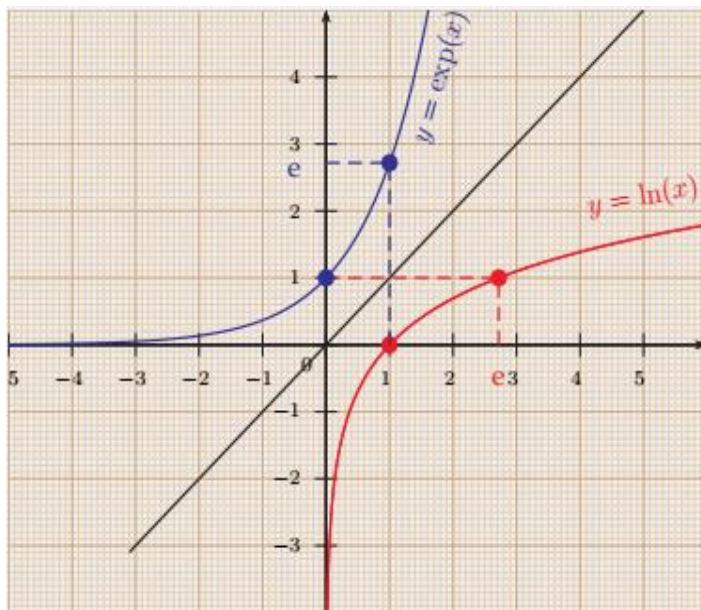
Equations et inéquations

Pour tous réels **x** et **y**, on a :

- $e^x > 0$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

Limites ($n \in \mathbb{N}^*$)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



Définition :

On appelle fonction **exponentielle**, la fonction réciproque de la fonction **logarithme népérien**.

L'image d'un réel **x** par la fonction **exponentielle** est notée **e^x**

Corollaire : Si **u** est une fonction dérivable sur **I**, alors la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ où **c** est une constante réelle.

II) Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition : La fonction réciproque de la fonction **log_a** est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle de base a** et se note **exp_a** tel que : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \exp_a'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) \cdot e^{x \ln a} = (\ln a) \cdot a^x$

Remarque • Si $a \in]0;1[$ la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur **IR**.

• Si $a \in]1;+\infty[$ la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur **IR**.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

- 1) Simplifier les expressions suivantes.

$$A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$B = (e^x - e^{-x})(e^{2x} + e^{-2x} + 1)$$

- 2) Montre que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$\bullet \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$$

$$\bullet \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

2) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

3) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

Exercice 3:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

2) $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

3) $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} > 0$

Exercice 4: calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^x$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x}$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{-x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot e^{-x}$$

$$G = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x + 1}$$

Exercice 5:

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = x \cdot e^{\sqrt{x}}$

2) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

3) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

4) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

Exercice 6 :

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

1) $f(x) = e^{-x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$; $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$; $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie pour tout réel x par:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

- 1) Déterminer la dérivée seconde de f .

- 2) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$$

- 3) Déterminer une primitive de la fonction f .

Exercice 8:

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x

par: $f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$, On désigne par (C_f) sa

courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 2) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $I(0; 2)$ est un point d'inflexion

- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ et interpréter

graphiquement le résultat trouvé.

- 4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

- 5) Etudier la position relative de (C_f) et (D) .

- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, et que $-4 < \alpha < -3$

- 7) En déduire que : $e^\alpha = -1 - \frac{4}{\alpha}$.

- 8) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (e^{-x} - 1)^2$$

On désigne par (C_f) sa courbe dans un repère

orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité: 2cm)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, et interpréter

graphiquement le résultat.

- 2) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

- 3) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-2x})$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

- 4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion.

- 5) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) Montrer que $(\forall x \geq 0) : g^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$

- 6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 10 : (Sujet 2019 Rattrapage)**Première partie:** Soit f la fonction définie sur

$$\mathbb{R}^* \text{ par: } f(x) = 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentativedans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité: 1cm)1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, et interpréter graphiquement le résultat.b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.b) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a:

$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2 - 2x + 4)e^{x-4}}{x^3}$$

b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 4 > 0$ c) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $[2; +\infty[$.d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ 4) Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.5) a) Vérifier que la fonction $H: x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2; 4]$.

b) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$$

c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4} dx$.d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.**Deuxième partie :**1) Soit g la fonction définie sur $[2; 4]$ par:

$$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$$

a) Calculer $g(4)$.b) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$,

$$g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$$

c) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$:

$$e^{x-4} - 1 \leq 0 \text{ puis en déduire que pour tout } x \text{ de } [2; 4]: g(x) \leq 0.$$

2) a) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$:

$$f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$$

b) En déduire que pour tout x de $[2; 4]: f(x) \leq x$.3) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): 2 \leq u_n \leq 4$.b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire quelle est convergente.c) Calculer la limite de (u_n) .**Exercice 11 :****Partie A :** On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - (1+x)e^x$ 1) Dresser le tableau de variation de g .2) Calculer $g(0)$. Puis en déduire le signe de $g(x)$ **Partie B :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1 - e^x). \text{ On désigne par } (C_f) \text{ sa courbe}$$

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.2) Montrer que la droite $(D): y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$. Et préciser la position relative de (D) et (C_f) .3) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{R}): f'(x) = g(x)$ b) Dresser le tableau de variation de f .5) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.6) Construire (D) et (C_f) .**Partie C :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): -1 \leq u_n \leq 0$ b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire quelle est convergente.c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Problème1 :

On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement le résultat.
- 2) a) Vérifier que $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- 3) a) Vérifier que la droite $(D): y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$
b) Etudier la position relative (D) et (C_f)
- 4) a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Etudier la concavité de (C_f) sur $\mathbb{R}$.
- 6) a) Montrer que (C_f) coupe la droite $(\Delta): y = x$ au point d'abscisse $\alpha = \ln(e - 1)$.
b) Montrer que : $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq \alpha$.
- 7) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\alpha$.
- 8) Tracer (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 9) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
c) Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.
d) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- 10) Soit (u_n) la suite définie par :
 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
a) Montrer que $u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Problème 2

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1 - e^x$

- 1) Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
- 2) Poser le tableau de variation de la fonction g (sans calcul de limites)
- 3) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$

Partie II : On considère la fonction numérique

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x} - 1$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

- 1) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ puis interpréter géométriquement le résultat
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
b) En déduire une branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 3) a) Montrer que $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
- 4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est la tangente à (C_f) en O .
- 5) a) Montrer que $f(x) - x = (x + 1)e^{-x}g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
b) Déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)
- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 < \alpha < 3$
- 7) a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$
b) Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.
- 8) Construire la courbe (C_f) et la droite (D) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(On prendra $\alpha \approx 2,5$ et $\frac{4}{e} - 1 \approx 0,5$)
- 9) Vérifier que $H: x \mapsto -(x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $h: x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Problème

11 points

Partie 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(x) = x + x^2 e^x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $(\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm})$

- 0,5 1) Montrer que f est continue en 0.
- 0,75 2) Montrer que f est dérivable en 0, puis interpréter les résultats obtenus géométriquement.
- 0,75 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- 0,75 4) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $(D): y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- 0,5 b. Montrer que (C_f) située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.
- 0,75 5) a. Montrer que: $f'(x) = 1 - x - 2x \ln x$; $x > 0$ et $f'(x) = 1 - e^x + (x+1)^2 e^x$; $x \leq 0$
- 0,75 b. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ et qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- 0,5 c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(1) = 0$)
- 0,5 6) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; 2[$.
- 0,25 b. En déduire que $\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$
- 0,5 7) a. Montrer que : $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$ pour tout x l'intervalle $]-\infty; 0]$
- 0,5 b. Vérifier que (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses $-2 + \sqrt{2}$ et $-2 - \sqrt{2}$.
- 1 8) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 0,75 9) a. A l'aide d'une intégration par partie montrer que : $\int_1^\alpha x^2 \ln x \, dx = \frac{3\alpha^2 - \alpha^3 + 1}{9}$
- 0,5 b. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

Partie 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0,5 1) Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- 0,5 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 0,75 3) Déterminer la limite de la suite (u_n)

I) Intégrale d'une fonction sur un segment.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de a à b de f , on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Notation : Par commodité, le nombre $F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$. C'est-à-dire: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Conséquences : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , alors quel que soit l'élément a de I ,

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

II) Propriétés de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , et a, b et c trois réels de I . et soit $k \in \mathbb{R}$.

▪ **Linéarité de l'intégrale:** $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

▪ **Additivité ou relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

▪ **Positivité de l'intégrale:** Si $f(x) \geq 0$ sur I et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

▪ **Intégrale et ordre:** Si $f(x) \leq g(x)$ sur I et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

▪ **Inégalité de la moyenne:** Si $m \leq f(x) \leq M$ sur I et si $a \leq b$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

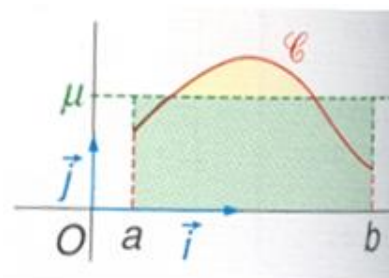
▪ **Valeur moyenne d'une fonction :**

Si $a < b$ alors le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur**

moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

Remarques :

- La valeur moyenne de f est comprise entre m et M .
- Si le plan est rapporté à un repère orthonormé et si $f(x) \geq 0$ sur I , alors μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ et d'aire : $\int_a^b f(x)dx$



III) Techniques de calcul d'une intégrale.

▪ **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.**

La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. (Tableau page 17)

▪ **Intégration par parties:** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Alors $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Or une primitive de $(uv)'$ est uv ,

d'où $\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$ (Formule d'intégration par parties)

▪ **Décomposition de fractions en éléments simples.**

▪ **Intégrale - Parité :** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a; a]$.

Si f est **paire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Si f est **impaire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

▪ **Intégrale – Périodicité :** Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période T .

Alors, quels que soient les réels a et b on a : $\int_a^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$

▪ **Linéarisation des fonction trigonométrique.** (Nombres complexes)

IV) Quelques applications du calcul intégral.

Aires de surfaces planes

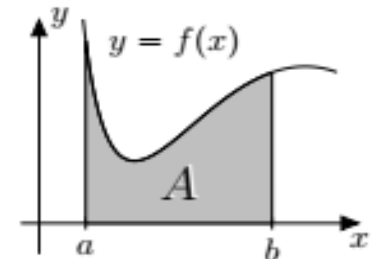
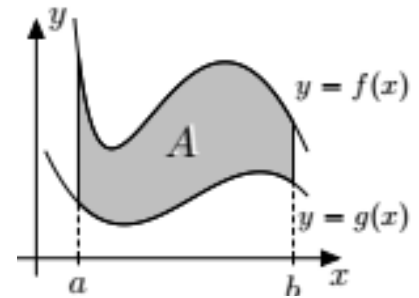
Supposons que le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire de la surface délimitée par (C_f) , (C_g) et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$

Est égale à $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ (unité d'aire).

- Cas particulier : L'aire de la surface délimitée par (C_f) , l'axe des **abscisses** et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$ est

$$\int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{u.a}) \quad \text{unité d'aire} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



Volume d'un solide de révolution

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

En faisant pivoter la courbe de f autour de l'axe (Ox) , on engendre un solide de révolution, dont

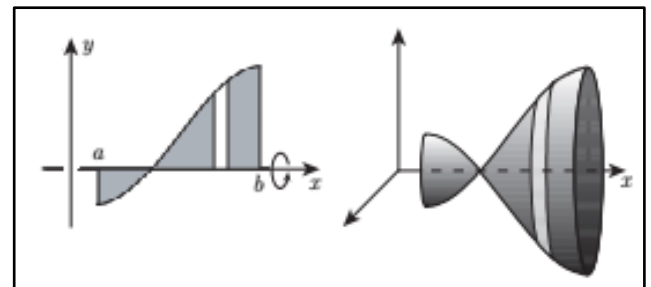
le **volume** est $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (unité de volume)

Remarques

- 1) f ne doit pas être nécessairement positive.
- 2) En intervertissant les rôles de x et de y , on obtient un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'axe (Oy)

Dans ce cas, on a : $V = \pi \int_a^b (f^{-1}(x))^2 dx$ (u.v)

- $\text{unité de volume} = \|\vec{i}\|^3$



Activité

- 1) Déterminer la fonction correspondante au demi-cercle de rayon r et de centre l'origine du repère.
- 2) En utilisant les intégrales, en déduire la formule de l'aire d'un disque de rayon r .
- 3) En utilisant les intégrales de révolution, en déduire la formule du volume d'une sphère de rayon r .

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^3 x \sqrt{x+1} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_2^1 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICE2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx \quad I_2 = \int_1^e x \ln x . dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$I_5 = \int_1^e \ln x . dx \quad I_6 = \int_1^{\sqrt{6}} 2x^3 \sqrt{3+x^2} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} . dx$$

$$I_{11} = \int_1^e x^2 \ln x . dx \quad I_{12} = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$I_{13} = \int_0^x \cos t . e^t dt \quad I_{14} = \int_2^1 \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

EXERCICE3 :

On Considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

1) Calculer I .

2) Soit $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

a) Montrer que : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) Déterminer une relation entre I et J .

c) En déduire la valeur de J .

EXERCICE4 :

Considérons les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1) Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$$

a- Calculer la dérivée de f .

b- Calculer la valeur de I .

2) a- Vérifier que $J + 2I = K$.

b- Montrer que $K = \sqrt{3} - J$

c- En déduire les valeurs de J et de K .

EXERCICE5 :

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}.$$

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

EXERCICE6 :

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (u 4 cm).

1) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les

droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (avec $\lambda > 0$).

2) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$.

EXERCICE7 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + 3 + \frac{2(1 - \ln x)}{\sqrt{x}} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe dans un}$$

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que la droite $(D) : y = x + 3$ est une asymptote à la courbe (C_f) .

b) Etudier la position de (C_f) et (D) .

2) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la surface comprise entre la courbe (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda \geq 1$.

EXERCICE8 :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^3}$.

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les réels a et b tel que :

$$\left(\forall x \in D_f\right) : f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^3}$$

3) Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

EXERCICE9 :

Pour tout réel positif a , on définit $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a) = \frac{\ln(a)-1}{a^2} + 1$.

2) En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

3) On définit maintenant $J(a) = \int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx$.

4) Vérifier que : $(\forall x \geq 1) : x^2 \leq x^2+1 \leq 2x^2$, puis montrer que $\frac{1}{2} I(a) \leq J(a) \leq I(a)$.

EXERCICE10 :

1) a- Vérifier que : $\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x+1)^3} dx$

2) a- En linéarisant $\cos^3(x)$, montrer que

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + 3\cos(x)$$

b- Calculer l'intégrale $J = \int_0^\pi \cos^3(x) dx$.

Equations différentielles linéaires

I) Equation Différentielle Linéaire du 1^{er} ordre : $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}$

Définitions :

1 - L'équation suivante : $(E) : y' = ay + b$ ou a et b deux constante, est appelé équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre **un**, ou y est la fonction inconnue.

2 - On appelle solution de l'équation différentielle (E) , toute fonction f qui vérifie (E) .

Propriétés : - Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel.

- Quel que soit le couple $(x_0; y_0)$ de réels, l'équation différentielle (E) admet une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

II) Equation Différentielle Linéaire du 2nd ordre : $y'' + ay' + by = 0$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Définition : L'équation $r^2 + ar + b = 0$, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$

Résolution d'une équation (E) : Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

Δ	L'équation caractéristique admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y : x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{rx}$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $p \pm iq$	$y : x \mapsto e^{px} (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Rappel : Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1:

Soit (E) l'équation différentielle: $y' = 3y + 1$.

- Résous l'équation (E) .
- Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur 6 en 0

Exercice2:

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$

- Résous l'équation (E_1) .
- Déterminer la solution f de (E_1) , telle que:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \quad \text{et} \quad f'(\pi) = 8.$$

- Montrez que,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice3 :

Soit l'équation différentielle : $(E_2) : y'' + y' - 2y = 0$.

- Résous l'équation (E_2) .

- Déterminer la solution f de (E_2) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice4 :

Soit (E_3) l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- Résous l'équation (E_3) .
- Déterminer la solution f de (E_3) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e$.
- Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice5 :

Considérons l'équation $(E_4) : y'' - 4y' + 13y = 0$.

- Résous l'équation (E_4) .
- Déterminer la solution f de (E_4) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$.
- En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Nombres complexes



Les nombres complexes prennent naissance au **XVI^{ème}** siècle lorsqu'un italien **Gerolamo Cardano** (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de **Jérôme Cardan**, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, **Rafaele Bombelli** (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de **Cardan** sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation i apparaît en 1777 siècle avec **Leonhard Euler** (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au **XIX^e** siècle, **Gauss** puis **Hamilton** posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

I) Notion de nombre complexe.

1) Définition-Vocabulaire.

Définition : On appelle nombre complexe, tout élément écrit $a + ib$, dans lequel a et b deux réels et i un élément vérifiant $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Vocabulaire : Soient a et b deux réels

- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et le nombre b s'appelle la **partie imaginaire**, et on note $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Im}(z) = b$.



Remarques: Soient a et b deux réels et $z = a + ib$

- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**, et on dit que $z \in i\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- $z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$
- $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$.
- $\mathbb{C}$ est un corps non ordonné.

2) Conjugué d'un nombre complexe.

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

On appelle nombre complexe **conjugué** de z , le nombre, noté $\bar{z}$, où $\bar{z} = a - ib$

Propriétés : Soit $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

- 1) $\bar{\bar{z}} = z$;
- 2) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- 3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$;
- 4) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$;
- 5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ / $z' \neq 0$
- 6) $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$;
- 7) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$;
- 8) $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$;
- 9) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$;
- 10) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

II) Représentation géométrique d'un nombre complexe.

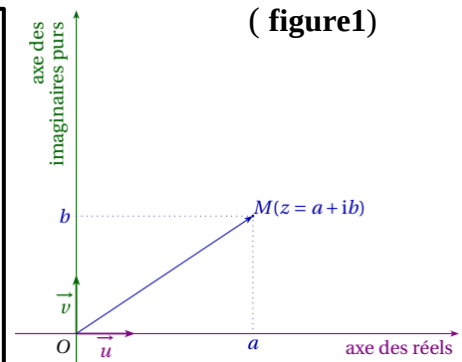
Définitions : Soient a et b deux réels. Et le plan est rapporté à un repère orthonormé **direct** $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a, b)$, le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **affixe** du point M . Et le point M est appelé image ponctuelle de $z = a + ib$, et on note $M(z)$.
- L'image vectorielle du nombre $z = a + ib$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$, le nombre $z = a + ib$ est appelé **affixe** du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$. (Voir figure 1 p33)

Propriétés :

$M(z)$ et $M'(z')$ sont deux points du plan et $\vec{w}(z)$ un vecteur.

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.
- Le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{w}$, k réel, a pour affixe $k.z$.
- Le milieu I du segment $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$.
- Le nombre $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé **module** de z , noté $|z|$.



(figure1)

Propriétés des modules : Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier naturel.

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ / $z' \neq 0$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ Inégalité trigonométrique

III) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Dans tout ce qui reste, le plan est rapporté à un repère orthonormal **direct** $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan avec M différent du point O et $z = a + ib$.

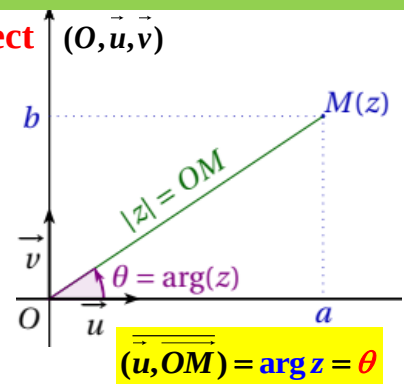
Alors $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Définitions :

- On appelle **argument** de $z = a + ib$, noté $\arg(z)$ tout réel θ tel que:

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Si on pose $r = |z|$ et $\arg(z) = \theta$, alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et cet écriture est dite écriture **trigonométrique** de z .



Interprétation géométrique

$A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points, deux à deux distincts.

- $|z_B - z_A| = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
- A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- Le triangle ABC est rectangle ssi $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- A, B, C et D sont **circulaires** si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$.

Propriétés des arguments

$$\begin{aligned} \arg(z z') &\equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \\ \arg(z^n) &\equiv n \arg(z) [2\pi] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi] \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &\equiv -\arg(z) [2\pi] \\ \arg(\bar{z}) &\equiv -\arg(z) [2\pi] \\ \arg(-z) &\equiv \pi + \arg(z) [2\pi] \end{aligned}$$

IV) Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Si a et b deux réels non nuls

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow \arg(a) \equiv 0 [2\pi] \\ a < 0 &\Rightarrow \arg(a) \equiv \pi [2\pi] \\ b > 0 &\Rightarrow \arg(ib) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ b < 0 &\Rightarrow \arg(ib) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

V) Formule de Moivre - Notation $r.e^{i\theta}$.

Formule de Moivre: Pour tout réel θ et tout entier n on a : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Remarque : La formule de **Moivre** permet par exemple d'exprimer $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et/ou $\sin x$.

Notation exponentielle : Pour des nombres complexes de module 1 et d'argument x et y on peut démontrer que :

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y), \text{ Et par analogie avec la propriété } e^x \times e^y = e^{x+y}$$

Le nombre $\cos x + i \sin x$ est noté e^{ix} , notation compatible avec la formule de **Moivre**.

Donc tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit $r.e^{i\theta}$

Propriétés : Soient θ et α deux réels et n un entier, alors :

$$e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \quad ; \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (\text{Moivre})$$

Propriété : Pour tout réel θ on a : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (**Formules d'Euler**)

Remarque : Ces formules permettent de **linéariser** $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$, c'est-à-dire d'exprimer ces quantités en fonction de $\sin(px)$ et $\cos(px)$. La linéarisation des fonctions trigonométriques est souvent très utile en analyse, par exemple pour déterminer des **primitives** de ces fonctions.

VI) Transformations planes.

Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois points du plan complexe et $\vec{u}(b)$ un vecteur.

Translation

Si M' est l'image de M par la **translation** t de vecteur $\vec{u}(b)$, alors : $z' = z + b$
L'égalité $z' = z + b$ est appelé l'**écriture** complexe de cette **translation**.

Donc :
 $t(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + b$

Homothétie

Soit k un réel non nul.
Si M' est l'image de M par l'**homothétie** h de centre Ω et de rapport k , alors : $z' - \omega = k(z - \omega)$
L'égalité $z' - \omega = k(z - \omega)$ est appelé l'**écriture** complexe de cette **homothétie**.

Donc :
 $h(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation

Soit θ un réel
Si M' est l'image de M par la **rotation** R de centre Ω et d'angle θ , alors
 $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est appelé l'**écriture** complexe de cette **rotation**, donc :

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

VII) Ensembles de points.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = r$ avec $r > 0$ est le **cercle** de **centre** A et de **rayon** r
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **médiatrice** du segment $[AB]$
- Parfois pour déterminer l'ensemble des points $M(z)$, On pose $z = x + iy / (x; y) \in \mathbb{R}^2$ dans la condition et l'on essaie de se ramener à une équation cartésienne.

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres

complexes suivants : $z_1 = i^{2020}$; $z_2 = (3 - \sqrt{2}i)^2$

$$z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i} ; z_4 = \frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(1+3i)^3 + (1+i)^2} ; z_5 = \frac{1}{7-4i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} ; z_7 = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}.$$

EXERCICE2:

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
- 2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives A, B et C , tel que :
 $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 - Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- 3) On désigne par A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - Placer le point A' et démontrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A .
- 4) On désigne par B' l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - Placer le point B' , et exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction z_B .
 - En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z_{B'}$.
- 5) Déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

EXERCICE3: (Session normale 2016)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $z^2 - 4z + 29 = 0$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives a, b et ω telles que : $a=5+2i$; $b=5+8i$ et $\omega=2+5i$
 - a) Considérons $u=b-\omega$. Vérifier que $u=3+3i$, puis montrer que $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
 - b) Déterminer un argument du nombre $\bar{u}$.
 - c) Vérifier que: $a-\omega=\bar{u}$, en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R .

EXERCICE4: (Session normale 2019)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=1-i\sqrt{3}$;
 $b=2+2i$; $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$
 - a) Vérifier que : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.
 - b) En déduire que A, B, C et D sont alignées.
- 3) On considère z' l'affixe d'un point M et z l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Vérifier que

$$z' = \frac{1}{2}az$$

- 4) Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R , et le point $P(p)$, tel que $p=a-c$
 - a) Vérifier que : $h=ip$.
 - b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

EXERCICE5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1$; $b=3+4i$;
 $c=2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})$ et $d=-2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$.
L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C .

- 1) a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .
b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.
- 2) Soit F , l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
 - a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
 - b. Montrer que le point F est le milieu de $[CD]$.
 - c. Montrer que $\frac{c-z_F}{a-z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{c-z_F}{a-z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

EXERCICE6:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

- 1) $|z - 1 + 2i| = 4$
- 2) $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$
- 3) $|iz - 2 + i| = 6$
- 4) $|\bar{z} - 1 + 2i| = |z - 3 - i|$
- 5) $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = -1$
- 6) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

EXERCICE7:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$.

- 1) Placer les points A, B et C sur une figure.
- 2) Soit $z = \frac{a-b}{c-b}$.
 - a. Interpréter géométriquement $|z|$ et $\arg(z)$.
 - b. Écrire Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
 - c. En déduire la nature du triangle ABC .
 - d. Déterminer $(\overline{BC}, \overline{BA})$.

EXERCICE8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que :

$$z' = 4z + 6 - 3i.$$

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f .

EXERCICE9:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1) a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle (Γ) de centre O .
 - c. Construire le cercle (Γ)
- 2) Déterminer un argument du nombre complexe b , et en déduire $(\overline{OA}, \overline{OB})$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE10:

- 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 2\sqrt{3}i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.
 - a- Ecrire a et b sous forme trigonométrique, et vérifier que a^{21} est un nombre réel.
 - b- Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .
- 3) a- Déterminer l'affixe du point E l'image du point A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
 - b- Montrer que $OAE B$ est un carré.
- 4) On considère la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$

a- Montrer que :

$$z' = -iz + 2\sqrt{3} - 2 + (2 + 2\sqrt{3})i$$

b- Déduire que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $c = -2 + 2\sqrt{3}i$

- 5) Soit le point D d'affixe $d = 6 + 2\sqrt{3}i$
 - a- Montrer que les points O, B et D sont alignés

b- Montrer que $\frac{d-c}{a-c} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis en déduire que ADC est un triangle équilatéral.

EXERCICE11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
 - b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.
- 2) On considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.
 - a- Placer dans le plan les points A et B .
 - b- Quelle est la nature du triangle OAB ?
- 3) Soit le point C d'affixe : $z_C = (2 - 2i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
 - b- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) a- Comparer OA et OC et déterminer $(\overline{OA}, \overline{OC})$.
 - b- quelle est la nature exacte du triangle OAC .

EXERCICE 12: (Session normale 2015)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 10z + 26 = 0$$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = -2 + 2i$;
 $b = -5 + i$; $c = -5 - i$ et $\omega = -3$
 - a) Vérifier que : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$.
 - b) En déduire la nature du triangle ΩAB .
- 3) Soit D l'image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4i$.
 - a) Montrer que l'affixe de D est $d = 1 + 3i$
 - b) Montrer que $\frac{b - d}{a - d} = 2$, en déduire que A est le milieu $[BD]$.

EXERCICE 13 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$
- 2) On pose $a = 1 - i$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$
 - a) Écrire a sous forme trigonométrique
 - b) Vérifier que $\frac{b}{a} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire b sous forme trigonométrique
 - c) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
 - d) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
 - e) Déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur.
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes a, b et $c = -1 + i\sqrt{3}$
 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a) Exprimer z' en fonction de z
 - b) Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC
- 4) Soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$|z - 2 - \sqrt{3} - i| = |z + 1 - i\sqrt{3}|$$
 - a) Déterminer l'ensemble (E) .
 - b) En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

EXERCICE 14 :

- 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 6z + 10 = 0$$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes $a = 4$ et $b = 3 - i$
 - a) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 Montrer que $z' = -iz + 4 + 4i$
 - b) Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = 3 + i$
 - c) En déduire la nature du triangle ABC
- 3) Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t
 - a) Déterminer d l'affixe du point D
 - b) En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$
- 4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} - 3 - i| = |3 + i|$

EXERCICE 15

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes $a = i$, $b = 2 + 3i$ et $c = \bar{b}$
 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$
 - a) Exprimer z' en fonction de z
 - b) Déterminer d l'affixe du point D est l'image du point A par la rotation R
 - c) En déduire la nature du triangle ABD
 - d) Montrer que les points B, C et D sont alignés

« La vie, c'est comme une bicyclette, il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre »

Albert Einstein

1) Rappel

- La norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\| = AB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
- Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $u^2 = \|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel. On a :
 - ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
 - ✓ $(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $\vec{u}(a; b; c)$; $\vec{v}(a'; b'; c')$ et $\vec{w}(a''; b''; c'')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = a a' + b b' + c c'$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2 + c^2 = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Si le point I est le milieu du segment $[AB]$ on a : $I\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$
- Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A; \vec{u})$.

2) Plan et vecteur normal.

a) Vecteur normal à un plan.

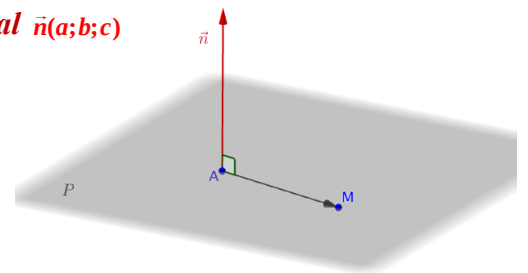
Définition : Soit (D) une droite perpendiculaire à un plan (P) , tout vecteur non nul directeur de (D) est appelé vecteur **normal** à (P) .

b) Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

Théorème :

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A .



- **Théorème :** soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur non nul avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et d un nombre réel.
- Une droite admettant $\vec{n}(a; b; c)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$
- Réciproquement : tout plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n}(a; b; c)$ comme vecteur normal.

Remarque :

- Deux plans dites orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

c) Distance d'un point à un plan.

Propriété : Considérons un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$

La **distance** du point A au plan (P) est: $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

3) Sphère.

a) Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.

Sachant que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifient $\Omega M = R$ (avec $R > 0$) est une sphère de centre Ω et de rayon R . alors on en déduit la propriété suivante

Propriété : La sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R a pour équation : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

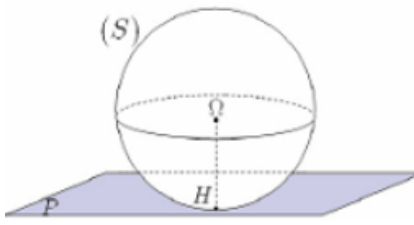
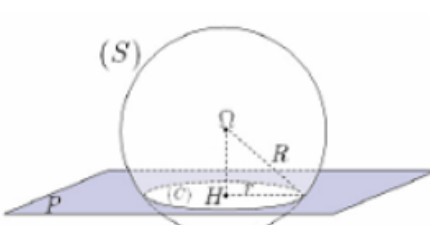
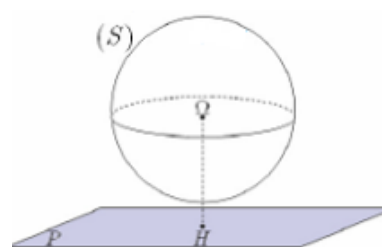
b) Equation cartésienne d'une sphère définie par son diamètre.

Propriété : La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Remarque : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$

4) Positions Relatives d'un plan et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R . Il suffit de comparer $d(\Omega, (P))$ au rayon R .

$d(\Omega, (P)) = R$	$d(\Omega, (P)) < R$	$d(\Omega, (P)) > R$
Le plan (P) et la sphère (S) ont un seul point commun H , le projeté de Ω sur (P) . On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H , le projeté de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan ne coupe pas la sphère
		

5) Produit vectoriel.

a) Orientation de l'espace.

L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :

On dit alors que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est de **sens direct**.

b) Notation et définition.

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;

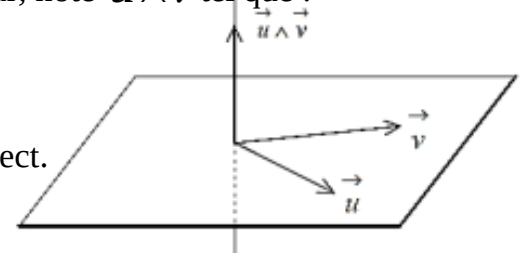
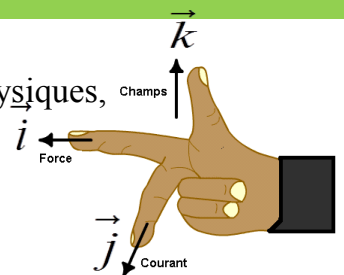
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

1) **Direction** : Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2) **Le sens** de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit de sens direct.

3) **Norme** : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))|$.

Remarque : Le produit **vectoriel** est un **vecteur**, alors que le produit **scalaire** est un **nombre**.



Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout nombre réel a ,

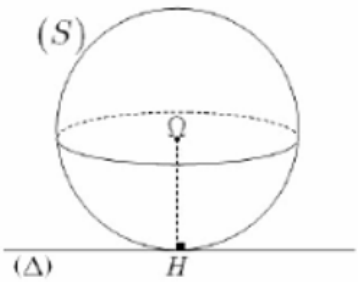
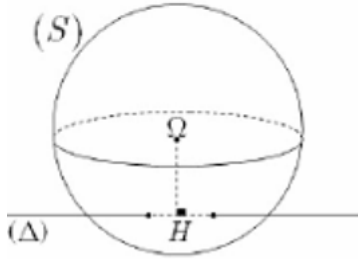
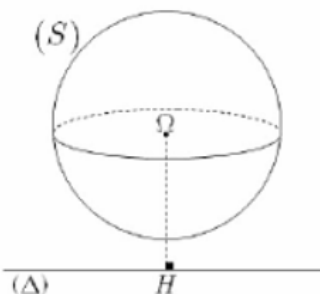
$$\bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \quad \bullet \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \bullet a(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v} \quad \bullet \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$\bullet \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b}' \\ \vec{c} & \vec{c}' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{a}' \\ \vec{c} & \vec{c}' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{a}' \\ \vec{b} & \vec{b}' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\bullet \text{ Soient la droite } D(A; \vec{u}) \text{ et le point } M, \text{ alors } d(M; (D)) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

c) Positions relatives d'une droite et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R . Il suffit de comparer $d(\Omega, (D))$ au rayon R .

$d(\Omega, (D)) = R$	$d(\Omega, (D)) < R$	$d(\Omega, (D)) > R$
La droite (D) est tangente à la sphère (S) .	La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents.	La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)
		

Propriété : L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE1:

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives: $A(-1; 2; 1)$;

$B(1; -6; -1)$; $C(2; 2; 2)$ et $I(0; 1; -1)$

1) a) Calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Déterminer une équation du plan (ABC)

2) Soit (Q) le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$

et (Q') le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

a) Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q') .

3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.

4) On considère les points J et K de coordonnées respectives : $J(-2; 0; 0)$ et $K(1; 0; 1)$

- Déterminer l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK) .

EXERCICE2:

$ABCDEFCH$ est un cube de côté 1.

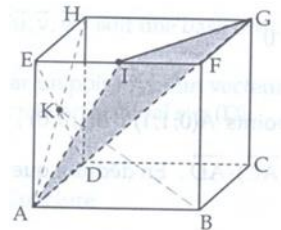
L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

I est le milieu de $[EF]$ et K est le centre du carré $ADHE$.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.

En déduire l'aire du triangle ICA .

2) Calculer le volume du tétraèdre $BICA$. En déduire la distance du point B au plan (ICA) .



EXERCICE3:

On donne les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 1)$ et

$C(0, 1, 1)$ et soit le plan. $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés

2) Montrer que : $(ABC): 2x + y + 2z - 3 = 0$.

3) Vérifier que les plans $(P) \perp (ABC)$.

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC) .

- 5) Soit le point $I(2,1,1)$ et M un point de (D) .
Déterminer M pour que la distance IM soit minimale et en déduire $d(I, (D))$.
- 6) a) Montrer que les points I, A, B et C ne sont pas coplanaires.
b) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$.
c) Calculer $d(I; (ABC))$ et en déduire l'aire du triangle ABC .
- 7) Soit l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + \frac{38}{9} = 0$.
- a) Montrer que S est une sphère de centre I et tangente au plan (ABC) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) et strictement parallèle à (ABC) .
c) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on précisera son rayon r et les coordonnées de son centre K .

EXERCICE4:

- Considérons les points $A(1;1;2)$; $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
- 1) Montrer que O, A et B ne sont pas alignés.
2) Montrer que le vecteur $\vec{N}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.
3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB) .
4) Soit le plan $(P) : x + y - z = 0$.
a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P)
b- Déterminer les points M de (Δ) tel que $d(M; (P)) = 1$.
c- Caractériser l'ensemble des points M de (P) tel que $d(M; (\Delta)) = \sqrt{2}$.
8) a- Donner une équation cartésienne du plan médiateur (Q) du segment $[AB]$.
B - Montrer que (Q) et (P) sont sécants.

EXERCICE5 :

- On considère les points $A(2,2,0)$; $B(0,2,2)$ et $C(1,0,1)$.
- 1) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = \vec{CA} \wedge \vec{CB}$.
2) Déterminer une équation du plan (ABC) .

- 3) (D) étant l'intersection du plan (P) et de l'axe $(O, \vec{i})$, E étant l'intersection du plan (P) et de l'axe $(O, \vec{k})$.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{DE}$ et $\vec{AB}$. Et Calculer $\vec{DA} \cdot \vec{DE}$.
- 4) Montrer que le triangle ABC est isocèle et calculer son aire.
5) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC .
6) a) Calculer $d(I; (P))$ avec $I(0; 2; 0)$.
b) Déterminer le volume du tétraèdre $IBCA$ par deux méthodes différentes.

EXERCICE6:

- On donne $A(2,1,0)$; $B(1,2,2)$ et $C(3,3,1)$.
- 1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
c) Montrer que $(ABC) : x - y + z - 1 = 0$.
d) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
- 2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) . Déterminer OH .
3) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
b) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC .
4) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.
a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre I et le rayon R
b) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à (S) .
c) En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC) .
d) Donner des équations cartésiennes des plans (P_1) et (P_2) parallèles à (ABC) et tangents à (S) .

EXERCICE7: (devoir 2022)

- On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(2;1;3)$; $B(3;1;1)$ et $C(2;2;1)$
- 1) Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
2) Montrer que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
3) Soit la sphère (S) d'équation :
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$
-Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1; -1; 0)$ et son rayon est $r = 6$

- 4) Montrer que $d(\Omega; (ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .
- 5) Déterminer le centre du cercle (C) .

EXERCICE8:

On considère les points $A(-1, -1, 1)$; $B(-1, 2, -2)$ et le plan (P) dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$.

- 1) Montrer que la droite (AB) est parallèle à (P) .
- 2) Soit α un réel et (S_α) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que :
- $$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0.$$
- a- Montrer que, (S_α) est une sphère de centre I_α et de rayon $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$, pour tout réel α .
- b- Montrer que, quand α varie dans $\mathbb{R}$, I_α décrit la droite (AB) .
- 3) Etudier suivant les valeurs de α , les positions relatives de (S_α) et du plan (P) .
- 4) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $(S_{1-\alpha})$.
- a- Montrer que I est le milieu de $[I_\alpha; I_{1-\alpha}]$.
- b- En déduire que les sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ sont symétriques par rapport au point I .

EXERCICE9:

Soit

$$S = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$$

On considère $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; -1)$

- 1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .
- 2) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- b) En déduire que : $(ABC) : x - 2y + 2z + 2 = 0$
- 3) a) Montrer que les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires
- b) Calculer le volume du tétraèdre ΩABC
- c) Calculer l'aire du triangle ABC , puis en déduire la distance de point Ω au plan (ABC)
- d) En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon r .

EXERCICE10: (session ordinaire 2022)

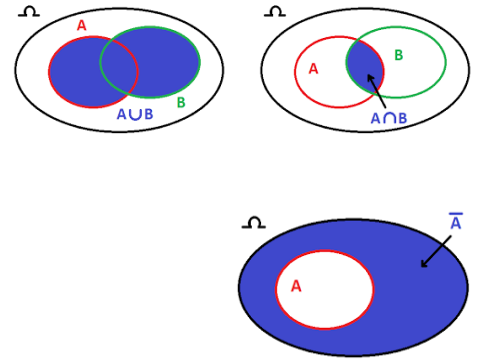
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$ et $C(-1; 1; 2)$

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j}$.
- b) En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; 1; 2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
- Déterminer une équation de la sphère (S) .
- 3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A .
- 4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC) .
- a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
- b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.
- c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{j})$, puis en déduire la distance $d(A; (\Delta))$

Alpha	Beta	Gamma	Delta	Theta
A	B	Γ	Δ	Θ
α	β	γ	δ	θ
Lamda	Tau	Omega	Epsilon	Pi
Λ	T	Ω	E	Π
λ	τ	ω		π
Zeta	Eta	Mu	Nu	Xi
Z	H	M	N	Ξ
ζ	η	μ	ν	ξ
Rho	Sigma	Phi	Chi	Psi
P	Σ	Φ	X	Ψ
ρ	σ	φ	χ	ψ

I) Cardinal d'un ensemble fini - Parties d'un ensemble.

- Soit Ω un ensemble fini de n éléments, $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.
L'entier naturel n est appelé **cardinal** de Ω . On note : $\text{card}\Omega = n$
- A et B désignent deux parties de Ω . On écrit : $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.
- Si A et B sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$
- $\bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A .
- $\bar{\bar{A}} = A$ et $\bar{A} \cap A = \emptyset$
- $\text{card} \bar{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A$



II) Principe de produit ou principe fondamental de dénombrement.

- **arbre de choix**
- **Principe de produit** : Si une expérimentation complexe peut se décomposer en p opérations élémentaires successives tels que :
 - La **première** opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
 - La **deuxième** opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
 - La **troisième** opération peut être effectuée de n_3 manières différentes. Et ainsi de suite ...
 - La $p^{\text{ième}}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$ manières différentes

III) Arrangements et permutation d'un ensemble fini.

- **Arrangements sans répétitions.**
- **Notion de factorielle** : Soit n un entier naturel tel que $n > 1$
On appelle " n factorielle " le nombre entier noté $n!$ tel que $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
Par convention, on pose $0! = 1$ et $1! = 1$.
- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **arrangement** de p éléments de Ω , toute suite de p éléments **distincts** de Ω . On le note A_n^p .

Il y a n façons de choisir le 1^{er} élément, $(n-1)$ façons de choisir le 2^{ème} élément, ..., $[n-(p-1)]$ façons de choisir le $p^{\text{ème}}$. et d'après le principe

Donc $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$. $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **permutation**, tout arrangement des n éléments de Ω .
Il y a $n!$ permutations de Ω si les n éléments sont distinguables entre eux.

- **Arrangements avec répétitions.**

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est n^p

N. B. : Quand il s'agit de classer k « objets », rangés en p groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de p objets quand k_1 sont d'une sorte, k_2 d'une autre, ..., k_p de la $p^{\text{ème}}$ sorte, avec

$k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$. Ce nombre est alors : $\frac{k!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_p!}$.

IV) Combinaisons d'un ensemble fini.

Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **combinaison** de p éléments de Ω , toute partie de p éléments de Ω . On la note C_n^p telle que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad / 1 \leq p \leq n$.

Formules usuelles : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$
 $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (formule de **Pascal**) ; $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$ (formule du **binôme**)

V) Types de tirages.

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de p boules d'une urne qui en contient n .
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
 - 1) L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
 - 2) La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

Ω étant un ensemble à n éléments, On tire p éléments parmi n éléments, donc :

Type de tirage	Ordre	Répétition	Nombre de tirages possibles
<i>Successif avec remise</i>	Important	Possible	n^p
<i>Successif sans remise</i>	Important	Impossible	$A_n^p \quad p \leq n$
<i>Simultané</i>	Pas important	Impossible	$C_n^p \quad p \leq n$

Exercices

Exercice1

Un sac contient **4 boules vertes**, **3 boules rouges** et **2 boules bleus**.

On tire **simultanément** et trois boules du sac.

- Déterminer le nombre de cas possible.
- Déterminer le nombre de cas possibles de chacun des événements suivants :

A : « Tirer trois boules vertes »
B : « les boules tirées sont de même couleur »
D : « Tirer deux boules rouges **et** une boule bleue »
E : « Tirage contenant une boule rouge exactement »
F : « Tirage ne contenant aucune boule rouge »
G : « Tirage contenant **au moins** une boule rouge »
H : « Tirage contenant au plus deux boules vertes »
K : « les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux »
M : « les boules tirées sont de couleur différentes »
N : « Tirage contenant au moins deux couleurs »
R : « Tirage contenant au plus deux couleurs »

Exercice2

Un sac contient **2 boules verte**, **5 rouges** et **3 bleus**.

On tire **successivement et sans remise**, trois boules.

- Déterminer le nombre de cas possible.
- Déterminer le nombre de cas possibles :

A : « Tirer trois boules vertes »
B : « les boules tirées sont de même couleur »
D : « Tirer deux boules rouges **et** une boule bleue »
E : « Tirage contenant une boule rouge exactement »
F : « Tirage ne contenant aucune boule rouge »
G : « Tirage contenant **au moins** une boule rouge »
H : « Tirage contenant au plus deux boules vertes »
K : « les boules sont de couleurs différentes deux à deux »
M : « les boules tirées sont de couleur différentes »
N : « Tirage contenant au moins deux couleurs »
R : « Tirage contenant au plus deux couleurs »
S : « Tirer une boule blanche, puis une boule rouge, puis une boule noire »
T : « Tirer une boule blanche et une boule rouge et une boule noire »

I) Vocabulaires.

- **aléatoire** = Lié au hasard ; imprévisible ; arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- L'**univers** Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles.
Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. (C'est-à-dire $\text{card}\Omega = n$)
- On appelle **événement** toute partie A de Ω .
- Un événement réduit à une seule issue $\{\omega_i\}$ est un **événement élémentaire**.
- Ω est appelé l'événement **certain**.
- $\emptyset$ est appelée l'événement **impossible**.
- Si A et B désignent deux événements de Ω , l'événement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.
- On dit que les événements A et B **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$; Cela revient à dire que les deux événements ne peuvent pas se réaliser en même temps.
- L'événement contraire d'un événement A , est $\bar{A}$ constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A .

Exemple : Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a **6** issues possibles.
- L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- A : « Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante $A = \{1; 3; 5\}$.
Donc $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$
- B : « Le résultat est un multiple de 5 », est on peut écrire $B = \{5\}$. Donc B est un événement élémentaire, mais « 5 » est une issue possible et B est un ensemble qui contient cette seule issue.



II) Probabilité d'un événement.

Définition : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « **la chance** » qu'un événement a pour se réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement A d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple : Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ et $A = \{\omega_2; \omega_5; \omega_8\}$ alors : $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\emptyset) = 0$ et Pour tout événement A on a : $0 \leq p(A) \leq 1$

Propriétés

- Pour tous événements A et B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A et B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux à deux **disjoints** ou **incompatibles** $A_1, A_2, \dots, A_n$ on a :
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$
- Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

III) Equiprobabilité.

Définition : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité. Donc : si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$

Alors $p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}\Omega}$; c'est-à-dire pour tous événement A on a : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Remarque : Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrement**.

Exemple : On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement : A « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 »
on a : $A = \{2; 4; 6\}$ donc $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

IV) Probabilité conditionnelle.

Définition : Soit B un événement de l'ensemble Ω , tel que $P(B) \neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_B , en posant, pour tout événement A , $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On note $P_B(A) = P(A/B)$ qui se lit « probabilité de A que B est réalisé ».

Propriété : Soient A et $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ deux événements de l'ensemble Ω , tel que $P(B) \neq 0$.

Alors : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Définition : On dit que deux événements A et $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$.

Remarque : Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

V) Probabilités totales.

1) Arbre de probabilité : C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'évènements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Remarque : Arbre probabiliste $\neq$ Arbre à dénombrer

Exemple

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A, B et C trois événements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M , donc nous obtenons l'arbre probabiliste ci-contre :

Remarque : Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1,
- la probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.

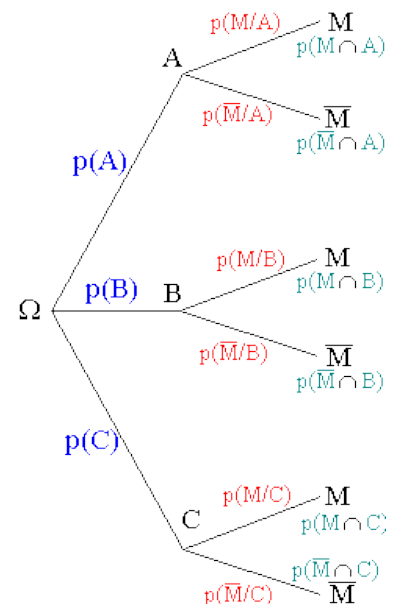
Donc : $p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$
 $= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C)$

2) Formule des probabilités totales.

Théorème : Soit $A_1, A_2, \dots, A_k$, des événements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers Ω . Alors, pour tout événement B de ce même univers, on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_k)$$

$$= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_k}(B) \times p(A_k)$$



Exercice : On considère trois urnes respectivement notées U_1 , U_2 et U_3 . L'urne U_1 contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne U_2 contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne U_3 contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

VI) Variables aléatoires.

Introduction : Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

Activité : On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 points pour chaque résultat « **Pile** » et on perd 1 point pour chaque résultat « **Face** ».

L'ensemble des issues est $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur Ω .

L'application $X : \Omega \rightarrow [0, 1]$, qui, à chaque issue, associe le **gain** du joueur, prend les valeurs - 3, 0, 3 et 6. Pour chaque valeur, on peut considérer l'événement $(X = 3) = \{PPF, PFP, FPP\}$ et lui associer sa probabilité $\frac{3}{8}$

On obtient ainsi une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains : $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$.

On la nomme **loi de X**.

gain x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Définition : soit X une variable aléatoire discrète, l'application p est dite loi de probabilité de X , définie par:

$$P : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

Remarque : Si X est une variable aléatoire discrète et p sa loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$$

Esperance mathématique :

On appelle espérance mathématique de X le nombre, noté $E(X)$, définit par : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(X = x_i)$

Variance et écart type :

- On appelle variance de X le nombre positif noté $V(X)$ suivant : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- On appelle écart type de X le nombre positif noté $\sigma(X)$ suivant : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

VII) Loi Binomiale.

Définition : On réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : **succès** de probabilité p et **échec** de probabilité $(1-p)$. Donc $(\forall k \in X(\Omega)); P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

X : nombre de succès obtenu est une variable aléatoire **binomiale** de paramètre n et p .

Propriété :

Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p . Alors :

$$X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Quelques interprétations

- $E(X)$ est la **moyenne** des valeurs x_i , pondérées par les valeurs p_i .
- Dans le domaine des jeux (le terme « **espérance** » vient de là), $E(X)$ est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque $E(X) = 0$; lorsque $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si $E(X) < 0$.
- La variance et l'écart-type sont des paramètres de **dispersion**.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

On tire **simultanément** 3 boules d'une urne qui contient 5 boules **rouges**, 3 boules **blanches** et 7 boules **noires**.

- Calculer la probabilité des événements suivants :

A: « Obtenir **une** boule de chaque couleur »

B: « Obtenir trois boules de même couleur »

C: « Obtenir **deux** boules rouges et **une** boule d'une autre couleur »

D: « Obtenir au moins deux boules noires »

Exercice 2 :

Une urne contient deux boules **blanches** numérotées 1,2 et trois boules **rouges** numérotées 1,2,2 toutes les boules sont indiscernables au toucher .

1) On tire **simultanément deux** boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité des événements suivants:

A « Tirer deux boules de couleurs différentes »

B « Tirer deux boules de même numéro »

b) Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différents, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer **successivement et sans remise deux** boules de l'urne soit X la variable aléatoire égale au nombre des boules rouges tirées, déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Exercice 3 : (national)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 5 boules **rouges** numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et 4 boules **blanches** portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément **trois** boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité des événements suivants:

A « Les trois boules tirées sont de même couleur »

B « Les trois boules tirées portant le même nombre »

C « Les trois boules tirées sont de même couleur et portant le même nombre »

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de réalisation de A.

a) Déterminer les paramètres de la variable X .

b) Montrer que $P(X=1) = \frac{25}{72}$ et calculer $P(X=2)$.

Exercice 4 :

Une urne contient 6 boules **blanches** et 4 boules **noires**, indiscernables au toucher.

Les boules blanches sont numérotées -1, -1, 0, 1, 1, 1 et les boules noires sont numérotées -1, 0, 1, 1

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne, et on considère les événements suivants :

A « Les 3 boules tirées sont de même couleur »

B « Les 3 boules tirées sont de même numéro »

C « Les 3 boules tirées sont de même numéro et de même couleurs »

1) a) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b) En déduire que $p(A \cup B) = \frac{17}{60}$.

2) Déterminer les probabilités des événements

D « Obtenir au moins une boule numérotée 1 »

E « La somme de numéros inscrit sur les boules tirée est égale à 0 »

Exercice 5 :

1) Un groupe de 26 personnes dont 10 sont des femmes doit élire un comité de 3 personnes.

Calculer la probabilité de chacun des événements :

A « Le comité contient au moins une femme ».

B « Le comité contient au moins 2 hommes ».

C « Le comité ne contient pas à la fois Madame X et Monsieur Y ».

2) Ce groupe de 26 personnes doit élire un comité composé d'un président d'un vice-président et d'un secrétaire.

▪ Calculer la probabilité de chacun des événements :

E « Le poste de président doit être occupé par un homme »

F « Le président est un homme, le secrétaire est une femme »

G « Les deux sexes figurent dans le comité ».

Exercice 6 : (session ordinaire 2022)

Une urne contient 10 boules : 3 boules **blanches**, 3 boules **vertes** et 4 boules **rouges** indiscernables au toucher.

On tire au hasard **simultanément** trois boules de l'urne

1) Montrer que $P(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement

« N'obtenir aucune boule rouge »

2) Calculer $P(B)$; B est l'évènement

« Obtenir trois boules blanches ou 3 boules vertes »

3) Montrer que $P(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement

« Obtenir exactement une boule rouge »

4) Calculer $p(D)$: où D est l'évènement "Obtenir au moins deux boules rouges

Exercice 7 :

Dans une usine, on produit chaque jour mille pièces du même modèle. Chacune de ces pièces est susceptible de présenter un défaut **A**, un défaut **B** ou simultanément les deux défauts **A** et **B**.

On admet que :

8 % des pièces présentent le défaut **A**.

Parmi les pièces qui ont le défaut **A**, **15 %** ont le défaut **B**

Parmi les pièces qui n'ont pas le défaut **A**, **5 %** ont le défaut **B**.

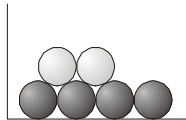
Déterminer, parmi la production d'un jour, le nombre de pièces qui :

- Présentent simultanément les défauts **A** et **B**
- Présentent le défaut **B** mais pas le **A**
- Présentent le défaut **B** et peut-être le **A**
- Ne présentent ni le défaut **A**, ni le défaut **B**

Exercice 8 :

Une urne contient **2** boules blanches et **4** boules noires.

Ces six boules sont indiscernables au toucher.



1) On tire simultanément **4** boules de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2) On effectue **4** tirages successifs d'une boule, sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

3) On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise.

a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

c) Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche au cours des quatre tirages.

d) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

Exercice 9 :

Une urne contient **5** boules rouges dont **2** ont une tache noire et **4** boules jaunes dont une a une tache noire.

On **extraît** une boule au hasard.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

A : « la boule extraite est jaune »

B : « la boule extraite a une tache noire »

C : « la boule extraite n'est pas jaune et sans tache noire. »

Exercice 10 :

Une urne contient une boule **blanche** numérotée **1**, deux boules **rouges** numérotées **1** et **2** et trois boules **vertes** numérotées **1**, **2** et **3**. Les boules sont indiscernables.

On extrait successivement deux boules de l'urne sans remise dans l'urne de la première boule tirée.

Trouver la **probabilité** de chacun des événements suivants :

A : « les deux boules sont rouges »

B : « les deux boules sont de couleurs différentes »

C : « le tirage comporte au moins une boule rouge »

D : « le tirage comporte exactement une boule verte »

E : « le tirage comporte une boule verte et une boule numérotée **1** »

F : « le tirage comporte une boule rouge ou une boule numérotée **1** ».

Exercice 11 :

Un élève répond au hasard aux dix questions d'un **Q.C.M.** Pour chaque question, cinq réponses sont proposées dont une seule est exacte. **X** est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1) Montrer que la loi de probabilité de **X** est une loi binomiale.

2) Calculer la probabilité d'avoir au moins cinq bonnes réponses

3) Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.



Soit x un réel

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Formules de transformation

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Transformation de produits en sommes

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

Transformation de sommes en produits

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Pour résoudre : $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$

Si $a \times b \times c \neq 0$

Il suffit de transformer $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$

Sous la forme $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$

Avec :

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Factorisation de $P(x) = ax^2 + bx + c$										
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$									
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a									
$\Delta = 0$	Une solution double $x_3 = -\frac{b}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_3	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de a	$P(x) = a(x - x_3)^2$		
x	$-\infty$	x_3	$+\infty$										
$P(x)$	signe de a	0	signe de a										
$\Delta < 0$	Pas de solution	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a		Pas de factorisation possible				
x	$-\infty$	$+\infty$											
$P(x)$	signe de a												

Valeur absolue : x est un réel et r est un réel positif . on a :

$$\bullet \quad |x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

$$\bullet \quad |x| = -x \quad \text{si} \quad x \leq 0$$

$$\bullet \quad |x| = |-x|$$

$$\bullet \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\bullet \quad |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

$$\bullet \quad |x| \geq r \Leftrightarrow x \leq -r \quad \text{ou} \quad x \geq r$$

Cadres de référence de l'examen national du baccalauréat - 2015

Série : Sciences Expérimentales

Premier domaine principal: Analyse

I) Suites numériques

1.1.1. Utiliser les suites géométriques et les suites arithmétiques pour étudier des exemples de suites de

la forme $u_{n+1} = au_n + b$ ou $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.

1.1.2. Utiliser les limites des suites de référence et les critères de convergence pour déterminer la limite d'une suite numérique.

1.1.3. Déterminer la limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue (suites du type $v_n = f(u_n)$).

1.1.4. Étudier la convergence d'une suite (u_n) de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et qui vérifie $f(I) \subset I$ et déterminer sa limite.

1.1.5. Utiliser les suites pour résoudre des problèmes variés issus de domaines différents.

II) Continuité, dérivation et étude de fonctions

1.2.1. Étudier la continuité d'une fonction numérique en un point en utilisant le calcul des limites.

1.2.2. Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle par une fonction continue ou par une fonction continue et strictement monotone.

1.2.3. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour étudier certaines équations et inéquations ou pour étudier le signe de certaines expressions...

1.2.4. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle pour prouver l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = \lambda$.

1.2.5. Étudier la dérivabilité d'une fonction numérique en un point et sur un intervalle.

1.2.6. Déterminer la fonction dérivée d'une fonction numérique.

1.2.7. Déterminer la monotonie d'une fonction

1.2.8. Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations.

1.2.9. Déterminer le signe d'une fonction à partir de sa représentation graphique.

1.2.10. Résoudre graphiquement des équations de la forme : $f(x) = g(x)$ et des inéquations de la forme $f(x) \leq g(x)$.

1.2.11. Déterminer la dérivée et la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle et la représenter graphiquement.

1.2.12. Résoudre des problèmes d'application concernant les valeurs minimales et les valeurs maximales.

1.2.13. Utiliser la dérivée première et la dérivée seconde pour étude d'une fonction numérique et pour prouver certaines inégalités...

1.2.14. Déterminer les fonctions **primitives** des fonctions usuelles

1.2.15. Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction sur un intervalle.

1.2.16. Maîtriser le calcul algébrique sur les logarithmes

1.2.17. Maîtriser la résolution des équations, des inéquations et des systèmes logarithmiques.

1.2.18. Reconnaître et appliquer le logarithme décimal (en particulier pour résoudre des équations du type $10^x = a$ et des inéquations du type $10^x \leq a$)

1.2.19. Maîtriser les limites logarithmiques de base et les appliquer.

1.2.20. Maîtriser la résolution des équations des inéquations et des systèmes comportant des exponentiels népériens.

1.2.21. Maîtriser les limites de base de la fonction exponentielle népérienne et les appliquer.

1.2.22. Étudier des fonctions ou des composées de fonctions figurant au programme et les représenter graphiquement (ensemble de définition, éléments de symétrie, périodicité, monotonie, branches infinies, tangentes, concavité, points d'inflexion).

1.2.23. Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$

1.2.24. Résoudre l'équation diff $y'' + ay' + by = 0$.

III) Calcul intégral

1.3.1. Utiliser une fonction primitive ou la technique de l'intégration par parties pour calculer l'intégrale d'une fonction.

1.3.2. Utiliser les propriétés de l'intégrale.

1.3.3. Calculer l'aire d'un domaine du plan limité par deux courbes.

1.3.4. Calculer le volume d'un solide de révolution engendré par la rotation de la courbe d'une fonction autour de l'axe des abscisses.

Deuxième domaine principal : Algèbre et géométrie

I) Produit scalaire dans V_3

2.1.1. Exprimer et démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs en utilisant le produit scalaire.

2.1.2. Exprimer vectoriellement l'orthogonalité et ses propriétés.

2.1.3. Exprimer analytiquement l'orthogonalité et ses propriétés.

II) Applications du produit scalaire dans l'espace

2.2.1. Déterminer une équation d'un plan défini par un point et un vecteur normal.

2.2.2. Déterminer une représentation paramétrique d'une droite passant par un point et orthogonale à un plan.

2.2.3. Etudier l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

2.2.4. Déterminer une équation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.

2.2.5. Reconnaître l'ensemble des points M de l'espace vérifiant la relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2.2.6. Utiliser la distance d'un point à un plan pour résoudre des problèmes géométriques (positions relatives d'un plan et d'une sphère et d'une droite et d'une sphère).

III) Produit vectoriel

2.3.1. Calculer l'aire d'un triangle en utilisant le produit vectoriel.

2.3.2. Déterminer une équation d'un plan défini par trois points non alignés.

2.3.3. Utiliser la distance d'un point à une droite pour résoudre des problèmes géométriques.

2.3.4. Appliquer le produit vectoriel pour résoudre des problèmes géométriques.

IV) Nombres complexes

2.4.1. Maîtriser le calcul algébrique sur les nombres complexes (dans ses différentes écritures : algébrique, trigonométrique et exponentielle).

2.4.2. Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe et réciproquement.

2.4.3. Linéariser des monômes trigonométriques en utilisant l'écriture exponentielle d'un nombre complexe

2.4.4. Traduire les notions géométriques suivantes : distance de deux points, mesure des angles, alignement de points, colinéarité et orthogonalité de vecteurs, en utilisant l'outil complexe.

2.4.5. Exprimer la translation, homothétie et la rotation en utilisant l'outil complexe.

2.4.6. Reconnaître une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes.

2.4.7. Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie (alignement, orthogonalité)

2.4.8. Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes où a, b et c sont des nombres réels.

2.4.9. Résoudre des équations dont la résolution se ramène à la résolution d'une équation du second degré à une seule inconnue à coefficients réels.

V) Calcul de probabilités

2.5.1. Utiliser le modèle de dénombrement convenable selon la situation étudiée

2.5.2. Calculer la probabilité de la réunion de deux événements de l'événement contraire d'un événement et de l'intersection de deux événements.

2.5.3. Calculer la probabilité conditionnelle et l'appliquer pour le calcul de la probabilité de

l'intersection de deux événements.

2.5.4. Reconnaître l'indépendance de deux événements.

2.5.5. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et calculer ses différents paramètres.

2.5.6. Reconnaître la loi binomiale et l'appliquer dans des situations variées

Tableaux de spécification

Suivant les domaines principaux

Domaine principal	Sous-domaines	Taux d'importance
Analyse	Suites numériques	55%
	Continuité, dérivation et étude de fonctions	
	Calcul intégral	
Algèbre et géométrie	Produit scalaire dans V_3	15%
	Applications du produit scalaire dans l'espace	
	Produit vectoriel	
	Nombres complexes	30%
	Calcul de probabilités	
Total		100%

Suivant les niveaux d'habileté

Niveau d'habileté	Taux d'importance
Application directe des connaissances (définition, propriété, algorithme formule, technique, règle)	50%
Evoquer et appliquer des connaissances non explicites dans une question (Définition propriété théorème, algorithme expression ; technique règle dans une situation habituelle.	35%
Traiter des situations inhabituelles par synthèse de connaissances et de résultats.	15%
Total	100%

Quelques références

- التوجيهات التربوية
- الإطار المرجعي للامتحان الوطني
- Fractale, Maths obligatoire classe terminale France programme 1998
- الواضح في الرياضيات
- خاص بأساتذة مادة الرياضيات (صفحة فيسبوكية)
- www.devoir.tn
- www.maths-et-tiques.fr